Méthode d'éléments spectraux avec joints pour des géométries axisymétriques

Jamil Satouri

Ecole doctorale des Sciences
Mathématiques de Paris Centre
UFR 929

Thèse de Doctorat de l'Université Pierre Et Marie Curie (Paris 6)

Présentée et soutenue publiquement
le 09 11 2010 pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
Spécialité : Mathématiques appliquées

Par

Jamil Satouri

Sujet de thèse :

Méthode d'éléments spectraux avec joints pour des géométries axisymétriques

Composition du jury

M. Yvon MADAY	Président
Mme. Christine BERNARDI	Directrice de thèse
Mme. Saloua AOUADI	Directrice de thèse
Mme. Francesca RAPETTI	Rapporteur
M. Azgal ABICHOU	Rapporteur
M. Adel BLOUZA	Membre

Laboratoire Jacques-Louis Lions-UMR 7598

Remerciements

Je tiens avant tout à adresser mes vifs remerciements à Mme Christine BERNARDI et à Mme Saloua AOUADI qui ont dirigé ce travail avec beaucoup de patience. Leur extrême gentillesse et rigueur scientifique m'ont été d'une aide précieuse. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier très vivement le Professeur Yvon MADAY qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes vifs remerciements s'adressent aux Professeurs Francesca RAPETTI et Azgal ABICHOU qui ont bien voulu rapporter sur cette thèse. Leurs avis me sont particulièrement importants.

Toute ma gratitude au Professeur Adel BLOUZA qui a suivi de près ce travail de thèse et qui me fait le plaisir de faire partie du jury.

M. Nejmeddine CHORFI m'a fait profiter de son expérience dans le calcul scientifique. Je lui suis très reconnaissant.

Je ne remercie jamais assez mes amis pour leur réconfort et leur soutien. Une pensée particulière à Slah, Khaled, Kamel, Nadhem, Talha, Moez et Noomen ainsi que mes amis de la faculté des sciences de Tunis.

Introduction générale

Introduction générale

Beaucoup de problèmes issus de la physique et de la mécanique sont formulés comme des problèmes aux limites dans des domaines tridimensionnels. Mais le calcul tridimensionnel coûte très cher et est parfois impossible avec les moyens actuels à cause de la complexité de l'équation aux dérivées partielles et de la géométrie du domaine. Il est classique, en mécanique de contourner la complexité de la géométrie tridimensionnelle et de réduire le domaine d'étude. Par exemple, pour les structures ayant deux dimensions petites par rapport à la troisième comme les barres, ou celles ayant une dimension petite par rapport aux deux autres comme les plaques ou les coques, on fait des approximations qui ramènent les problèmes initialement tridimensionnels à des problèmes respectivement monodimensionnels ou bidimensionnels [32]. Dans le cadre de cette thèse, on suppose que le domaine initial est invariant par rotation autour d'un axe (axisymétrique) et que l'opérateur intérieur et l'opérateur de bord satisfont des propriétés d'axisymétrie. Le problème peut alors être réduit, sans aucune approximation et par des développements en coefficient de Fourier par rapport à la variable angulaire, en une famille dénombrable de problèmes bidimensionnels. Cette réduction est d'autant plus intéressante que si en plus les données sont axisymétriques, seuls les coefficients de Fourier d'ordre zéro subsistent. Dans le cas de données initiales quelconques, une méthode d'approximation consiste à négliger les fréquences de grands ordres et réduire le problème initial à un nombre fini de problèmes bidimensionnels associés à un nombre fini de coefficients de Fourier. Ils y étudient en outre. L'erreur due à cette troncature a été étudiée dans 3.4 : il est prouvé que pour des données analytiques, cette erreur décroît exponentiellement par rapport à la troncature sur les fréquences. Ce type de problèmes axisymétriques a été traité par la méthode des éléments finis [14] et [15] et par la méthode spectrale [8], dans un cas d'une décomposition conforme avec une condition de continuité à travers les interfaces.

Le domaine axisymétrique le plus simple est évidemment le cylindre généré par un rectangle unique. Quoique intéressant et assez fréquent dans la physique, ce cas est restrictif pour les problèmes réels. C'est pourquoi on généralise à un domaine méridien polygonal qui peut donc être décomposé en un nombre fini de rectangles ou de trapèzes disjoints. Néanmoins, la présence de coins dans le domaine méridien induit des limitations sévères sur la régularité des solutions [29] et donc une faible vitesse de convergence lorsqu'on approche notre solution par une méthode spectrale ou d'éléments finis [21], [35]. On décompose alors la solution en une partie régulière, avec régularité optimale, et une combinaison linéaire de fonctions singulières [31].

Les méthodes de décomposition de domaines consistent à partager le domaine de résolution d'une équation aux dérivées partielles, en sous-domaines de plus petite taille et dans la mesure du possible de géométrie plus simple. Pour ces méthodes, les conditions de transmission (contraintes de raccord sur les interfaces) sont déterminantes pour une bonne approximation de la solution du problème initial, ainsi que pour l'efficacité numérique (coût de calcul, adaptation au parallélisme).

On distingue deux types de techniques de décomposition de domaines : conforme et non conforme. Pour des discrétisations de type variationnel, la conformité se traduit par l'appartenance des fonctions discrètes à l'espace apparaissant dans la formulation variationnelle : comme ces fonctions sont, en général, très régulières sur chaque sous-domaine, cette appartenance se réduit à l'imposition de conditions de raccord appropriées sur les interfaces. Ainsi pour un problème de Laplace la conformité se traduit par la continuité des fonctions. Notons que ce type de raccord suppose, en général, une disposition particulière des sous-domaines, de leurs maillages est l'utilisation de discrétisations du même type sur chacun d'eux.

La méthode de joints s'inscrit dans le cadre de méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement avec discrétisations de type variationnel. Elle a été introduite et étudiée pour des problèmes d'ordre deux, pour des éléments spectraux et pour le couplage des méthodes spectrales et de la méthode des éléments finis dans [19], [18], [20], [27] et [39], en fait la méthode fournit un cadre approprié pour le couplage de différentes discrétisations dans les sous-domaines. De nombreuses applications, basées sur la méthode de joints, ont vu le jour pour des problèmes d'ordre deux et notamment, l'extension de celle-ci aux problèmes tridimensionnels non conforme [13], le couplage de méthodes spectrales et des éléments finis [34]. On cite également les travaux de **Y. Achdou, Y. A. Kuznetsov et O. Pironneau** [3] et [4] pour les problèmes de la mécanique des fluides en dimension trois.

Dans ce travail, on se propose d'étendre la méthode de joints, à la résolution d'équations de Laplace et de Stokes tridimensionnels dans un domaine axisymétrique. En effet ces problèmes interviennent dans de nombreux systèmes de mécanique des milieux continus, aussi bien pour des solides que des fluides. Pour la résolution directe de ce genre de problèmes, les méthodes spectrales fournissent un cadre approprié, puisque les polynômes approchent bien les fonctions régulières (il est bien connu que l'erreur d'approximation décroît comme une puissance négative du degré maximal des polynômes).

Dans **le premier chapitre**, on introduit les domaines d'étude qui sont principalement trois types de domaines présentant des singularités d'arêtes.

On rappelle l'expression explicite des fonctions singulières associées à l'opérateur de Laplace, et le résultat d'approximation polynomiale de ces fonctions. Ces types de singularités sont totalement connus dans les cas bidimensionnel d'où l'interêt de traiter les problèmes axisymétriques. On montre aussi l'utilité de ce résultat pour doubler l'ordre de l'estimation d'erreur en norme H^1 entre la solution du problème continu et la solution discrète du problème de collocation sur $[-1, 1]$.

Dans **le deuxième chapitre**, on introduit la discrétisation spectrale qu'on adopte dans les éléments et on présente les outils nécessaires à la méthode de joints, à savoir les opérateurs d'interpolation polynômiale et les opérateurs de projection. Ensuite on traite le problème de Laplace dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. La discrétisation du problème continu repose sur la formulation variationnelle et s'effectue par la méthode de Galerkin avec intégration numérique. L'espace d'approximation n'est pas contenu dans l'espace continue, il s'agit d'une non-conformité d'espace. On montre notamment que l'erreur ne dépend que de la régularité locale de la solution exacte dans les sous-domaines. Il faut noter que les estimations d'erreur qu'on obtient sont optimales.

Ensuite une partie est consacrée à l'analyse mathématique de l'algorithme de Strang et Fix. Deux algorithmes pour le calcul de coefficients de singularité, celui **Amara et Moussaoui** [6] et celui de **Strang et Fix** [40], ont été étendus au cadre de la méthode de joints pour le bilaplacien [11] et le Laplacien et Stokes [31] dans le cas bidimensionnel. Dans l'étude théorique de notre problème, on traite séparément les cas axisymétrique, général et tridimensionnel.

A la fin du chapitre 1, on présente la mise en œuvre de la méthode de joints et les matrices associées au problème. Le code de calcul est développé en langage MATLAB. Des résultats numériques prouvant l'efficacité de la méthode des joints sont présentés et commentés.

Par analogie au deuxième chapitre, **le chapitre 3** est consacré à l'étude mathématique et numérique du problème de Stokes par la méthode spectrale des éléments avec joints, pour une décomposition géométrique non conforme dans des domaines axisymétriques, et à l'étude de l'algorithme de Strang et Fix. On prouve deux conditions inf-sup sur les deux formes bilinéaires discrètes qui interviennent dans les problèmes discrets dans les deux cas axisymétrique et général. On présente aussi les estimations pour les solutions $\boldsymbol{u}$ et p. On utilise ensuite une autre fois l'algorithme de Strang et Fix pour agrandir seulement l'espace discret de la vitesse. Nous prouvons deux conditions inf-sup sur les deux formes bilinéaires discrètes qui définissent les problèmes discrets dans les deux cas axisymétrique et dans le cas général. Il est à signaler que dans le cas non homogène on perd du côté de la singularité et on a un terme $N^{\frac{1}{2}}\log(N)$ qui intervient dans toutes les inégalités du côté de la singularité, mais ceci n'empèche pas la convergence de la méthode. Les estimations d'erreur sur $\boldsymbol{u}$ et p sont aussi bonnes que dans le cas conforme avec continuité d'interface et de même ordre, il n'y pas de perte d'optimalité dans les estimations de l'erreur réelle, ce qui prouve l'efficacité de la méthode des joints. Enfin on termine le chapitre 3 par une mise en œuvre de l'algorithme de Stokes où on présente les outils nécessaires (matrices A, B, F et G, et matrices de raccord...), suivi des tracés et des courbes d'erreur analysés et commentés.

Dans **le chapitre 4 et 5**, c'est - à - dire dans l'annexe 1 et 2, on explicite le choix des bases en fonction de la discrétisation choisie, les équations discrètes et le calcul des coefficients des matrices associées aux deux problèmes de Laplace et Stokes. Enfin on explicite les matrices qui assurent le raccord entre les interfaces.

Table des matières

Chapitre I

CADRE GÉNÉRAL

Le but de ce chapitre est d'introduire le cadre général de la théorie spectrale de Fourier pour les problèmes axisymétriques dans lequel s'insèrent le problème de Laplace et le problème de Stokes. Nous décrivons la géométrie et les espaces fonctionnels pour un problème elliptique et nous écrivons les formulations variationnelles associées dans un premier lieu à des données axisymétriques, ensuite à des données générales. Nous donnons quelques résultats de régularité des solutions.

Les résultats de ce chapitre figurent dans $[8, \textit{Chapites I et II}]$, nous y référons pour les démonstrations.

1.1 Géométrie

Pour un point de $\mathbb{R}^3$, on utilise les coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (r, θ, z) avec

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r \in \mathbb{R}_+, \theta \in \left]-\pi, \pi\right[,$$

et

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} -Arc\cos\frac{x}{r} & \text{si } y \leq 0, \\ Arc\cos\frac{x}{r} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

On note $\mathbb{R}^2_+$ le demi-espace de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(r, z) \in \mathbb{R}^2,\, r \geq 0\right\}.$$

Soit Ω un polygone de $\mathbb{R}^2_+$, de frontière $\partial\Omega = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} \Gamma_i$ formée d'un nombre fini de segments Γ_i, $1 \leq i \leq n$, dits côtés de Ω. Les extrémités de ces côtés sont dits coins de Ω. On appelle $c_1, c_2, ...c_\ell$ les coins du polygone qui sont sur l'axe $r = 0$, et $e_1, e_2, ...e_j$ les autres coins de Ω. On note Γ_0 l'intersection de $\partial\Omega$ avec l'axe $r = 0$ et $\Gamma = \partial\Omega \backslash \Gamma_0$. On note $\breve{\Omega}$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ obtenu par rotation de Ω autour de l'axe $r = 0$. L'ensemble Ω sera appelé domaine méridien de $\breve{\Omega}$ et on a

$$\breve{\Omega} = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3, \ (r, z) \in \Omega \cup \Gamma_0, \ -\pi \leq \theta \leq \pi \right\}. \tag{1.1.1}$$

Dans la suite, on va travailler dans des domaines présentant des obstacles, comme illustré dans les figures 1.1.1 et 1.1.2

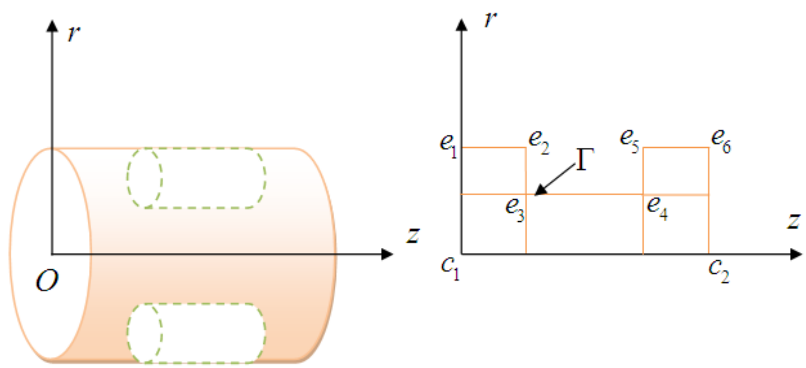

Fig. 1.1.1: Exemple de géométrie 1

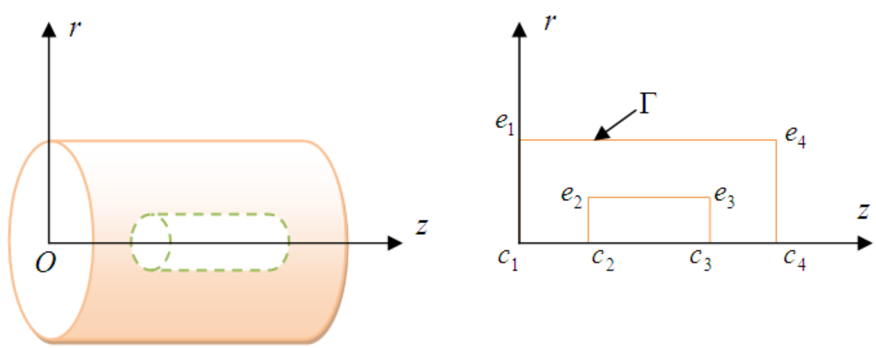

Fig. 1.1.2: Exemple de géométrie 2

1.2 Problèmes axisymétriques et réduction de la dimension

On considère le problème elliptique $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ défini dans $\breve{\Omega}$ par :

$$\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right] \begin{cases} \breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{v}} = \breve{\boldsymbol{f}} & \text{dans } \breve{\Omega}, \\ \breve{\boldsymbol{B}}\breve{\boldsymbol{v}} = \breve{\boldsymbol{g}} & \text{sur } \partial\breve{\Omega} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

où $\breve{\boldsymbol{A}}$ et $\breve{\boldsymbol{B}}$ sont respectivement des $M \times M$ et $m \times M$ opérateurs différentiels, $\breve{\boldsymbol{v}}$ est une inconnue à M composantes et $\breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$ sont des données correspondant aux forces extérieures. On renvoie à [5] pour les définitions générales et les propriétés des opérateurs elliptiques.

On note R_η la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle η autour de l'axe $r = 0$, elle est définie par :

$$R_\eta\,(x, y, z) = (x\cos\eta - y\sin\eta, x\sin\eta + y\cos\eta, z) \tag{1.2.2}$$

Il est évident que $\breve{\Omega}$ est invariant par la rotation R_η, que le vecteur normal $\breve{n}$ au bord $\partial\breve{\Omega}$ est obtenu par rotation du vecteur n normal à Γ autour du même axe et que pour tout $\breve{\boldsymbol{v}} \in D'(\breve{\Omega})$, on a la formule :

$$\langle \breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta, \breve{\boldsymbol{w}} \rangle = \langle \breve{\boldsymbol{v}}, \breve{\boldsymbol{w}} \circ R_\eta^{-1} \rangle \quad \forall \breve{\boldsymbol{w}} \in D(\breve{\Omega}). \tag{1.2.3}$$

Ci-dessus, $D(\breve{\Omega})$ dénote l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\breve{\Omega}$ et $D'(\breve{\Omega})$ l'espace des distributions associé.

Définition 1.2.1 *Le problème* $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ *est dit axisymétrique si, pour tout* η *dans* $[-\pi, \pi]$ *il existe un automorphisme* I_η *de* $\mathbb{R}^M$ *et un automorphisme* J_η *de* $\mathbb{R}^m$ *tels que toute fonction régulière* $\breve{\boldsymbol{v}} : \breve{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^M$ *satisfasse :*

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{A}}\,(I_\eta(\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta)) = I_\eta\left((\breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{v}}) \circ R_\eta\right), \\ \breve{\boldsymbol{B}}\,(J_\eta(\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta)) = J_\eta\left((\breve{\boldsymbol{B}}\breve{\boldsymbol{v}}) \circ R_\eta\right). \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Remarque 1.2.1 *Dans le cas où* $M = 1$, I_η *est la fonction multiplication par une constante. La propriété* (1.2.4) *devient alors* $\breve{\boldsymbol{A}}\,(\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta) = (\breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{v}}) \circ R_\eta$.

1.2.1 Problèmes invariants par rotation

Définition 1.2.2 *Le problème* $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ *est dit invariant par rotation si, pour toute fonction régulière* $\breve{\boldsymbol{v}} : \breve{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^M$ *et pour tout* $\eta \in [-\pi, \pi]$ *on a :*

$$\begin{cases} \breve{\boldsymbol{A}}\left((\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta)\right) = (\breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{v}}) \circ R_\eta, \\ \breve{\boldsymbol{B}}\left((\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta)\right) = (\breve{\boldsymbol{B}}\breve{\boldsymbol{v}}) \circ R_\eta. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Une propriété équivalente à la définition 1.2.2 est la suivante.

Propriété Le problème $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ est invariant par rotation si et seulement les opérateurs $\breve{\boldsymbol{A}}$ et $\breve{\boldsymbol{B}}$ écrits en coordonnées cylindriques ont des coefficients indépendants de θ, c'est à dire qu'il peuvent être écrits sous la forme :

$$\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{A}}\left(x, y, z; \partial_x, \partial_y, \partial_z\right) &= \tilde{\boldsymbol{A}}\left(r, z; \partial_r, \partial_\theta, \partial_z\right) \qquad (1.2.6) \\ \breve{\boldsymbol{B}}\left(x, y, z; \partial_x, \partial_y, \partial_z\right) &= \tilde{\boldsymbol{B}}\left(r, z; \partial_r, \partial_\theta, \partial_z\right) \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1 *Le laplacien* $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ *s'écrit en coordonnées cylindriques* $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \partial_z^2$. *Associé à des conditions de Dirichlet sur le bord, le laplacien est donc invariant par rotation.*

Définition 1.2.3 *Soit* $\breve{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{D}'(\breve{\Omega})$, $\breve{\boldsymbol{v}}$ *est dit invariant par rotation si :*

$$\forall \eta \in [-\pi, \pi], \ \breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta = \breve{\boldsymbol{v}}. \tag{1.2.7}$$

Maintenant, si toutes les données du problème (1.2.1), à savoir $\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}, \ \breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$, sont invariants par rotation, alors celui ci se réduit au problème bi-dimensionnel suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} \quad \textit{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \quad \textit{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

où

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f}\,(r, z) = \breve{\boldsymbol{f}}\,(x, y, z)\,, \quad \boldsymbol{g}\,(r, z) = \breve{\boldsymbol{g}}\,(x, y, z)\,, \\ \boldsymbol{A}\,(r, z; \partial_r, \partial_z) = \tilde{\boldsymbol{A}}\,(r, z; \partial_r, 0, \partial_z)\,, \\ \boldsymbol{B}\,(r, z; \partial_r, \partial_z) = \tilde{\boldsymbol{B}}\,(r, z; \partial_r, 0, \partial_z)\,. \end{gathered} \tag{1.2.9}$$

On voudrait généraliser cette réduction aux problèmes axisymétriques.

1.2.2 Problèmes axisymétriques avec données axisymétriques

Définition 1.2.4 *Soit $\breve{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{D}'(\breve{\Omega})$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$ une fonction définie sur $\partial\breve{\Omega}$. La distribution $\breve{\boldsymbol{v}}$, resp. la fonction $\breve{\boldsymbol{g}}$, est dite axisymétrique si, pour tout η dans $[-\pi, \pi]$ il existe un automorphisme I_η de $\mathbb{R}^M$, resp. un automorphisme J_η de $\mathbb{R}^m$, tel que :*

$$I_\eta(\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta) = \breve{\boldsymbol{v}}, \tag{1.2.10}$$

$$J_\eta(\breve{\boldsymbol{g}} \circ R_\eta) = \breve{\boldsymbol{g}}. \tag{1.2.11}$$

Remarque 1.2.2 *Si le problème $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ est axisymétrique dans le sens de la définition 1.2.1, alors $\breve{\boldsymbol{A}}\breve{\boldsymbol{v}}$ est axisymétrique dans le sens (1.2.10) et $\breve{\boldsymbol{B}}\breve{\boldsymbol{v}}$ est axisymétrique dans le sens (1.2.11).*

Dans le but de réduire la dimension d'un problème axisymétrique, nous allons faire l'hypothèse suivante.

Condition 1.2.1 *On suppose que les opérateurs $\eta \longmapsto I_\eta$, $\eta \longmapsto J_\eta$ sont des morphismes de groupes, c'est-à-dire :*

$$\forall \eta \in [-\pi, \pi], \forall \xi \in [-\pi, \pi] \quad I_{\eta+\xi} = I_\eta \circ I_\xi \quad et \quad J_{\eta+\xi} = J_\eta \circ J_\xi. \tag{1.2.12}$$

Moyennant cette hypothèse, on peut montrer facilement que si le problème $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ et les fonctions $\breve{\boldsymbol{v}}$, $\breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$ sont axisymétriques, alors les applications suivantes sont invariantes par rotation :

$$(r, \theta, z) \longrightarrow I_\theta \breve{\boldsymbol{v}}(r, \theta, z), \quad (r, \theta, z) \longrightarrow I_\theta \breve{\boldsymbol{f}}(r, \theta, z), \quad (r, \theta, z) \longrightarrow I_\theta \breve{\boldsymbol{g}}(r, \theta, z)$$

et on a la proposition suivante.

Proposition 1.2.1 *Si le problème $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ est axisymétrique, alors le problème associé $\left[\breve{\boldsymbol{A}}^*, \breve{\boldsymbol{B}}^*\right]$ est invariant par rotation, où $\left[\breve{\boldsymbol{A}}^*, \breve{\boldsymbol{B}}^*\right]$ est défini par :*

$$\begin{aligned} (\breve{\boldsymbol{A}}^* \breve{\boldsymbol{v}})(r, \theta, z) &= I_\theta \left(\breve{\boldsymbol{A}}(I_{-\theta} \breve{\boldsymbol{v}})\right)(r, \theta, z), \\ (\breve{\boldsymbol{B}}^* \breve{\boldsymbol{v}})(r, \theta, z) &= J_\theta \left(\breve{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{I}_{-\theta} \breve{\boldsymbol{v}})\right)(r, \theta, z). \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

On déduit de cette proposition que les opérateurs $\breve{\boldsymbol{A}}^*$ et $\breve{\boldsymbol{B}}^*$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{A}}^*(x,y,z;\partial_x,\partial_y,\partial_z) &= \tilde{\boldsymbol{A}}(r,z;\partial_r,\partial_\theta,\partial_z), \\ \breve{\boldsymbol{B}}^*(x,y,z;\partial_x,\partial_y,\partial_z) &= \tilde{\boldsymbol{B}}(r,z;\partial_r,\partial_\theta,\partial_z) \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

et on pose $\boldsymbol{A}(r,z;\partial_r,\partial_z) = \tilde{\boldsymbol{A}}(r,z;\partial_r,0,\partial_z)$ et $\boldsymbol{B}(r,z;\partial_r,\partial_z) = \tilde{\boldsymbol{B}}(r,z;\partial_r,0,\partial_z)$.

Proposition 1.2.2 *On suppose que le problème $\left[\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}}\right]$ est axisymétrique et que $(\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}})$ est défini sur un espace $\breve{V}$ à valeurs dans un espace produit $\breve{F}\times\breve{G}$. On définit $\breve{V}_0$, $\breve{F}_0$ et $\breve{G}_0$ comme sous-espaces respectifs de $\breve{V}$, $\breve{F}$ et $\breve{G}$ des fonctions axisymétriques. Alors il existe des espaces de fonctions V, F et G, définies sur Ω, tels que les fonctions suivantes sont des isomorphismes :*

$$\Phi_V : \breve{V}_0 \longrightarrow V \qquad \Phi_F : \breve{F}_0 \longrightarrow F \qquad \Phi_G : \breve{G}_0 \longrightarrow G$$

$$\Phi_V\ \breve{\boldsymbol{v}}(r,z) = (I_\theta\breve{\boldsymbol{v}})(r,\theta,z), \quad \Phi_F\ \breve{\boldsymbol{f}}(r,z) = (I_\theta\breve{\boldsymbol{f}})(r,\theta,z), \quad \Phi_G\ \breve{\boldsymbol{g}}(r,z) = (J_\theta\breve{\boldsymbol{g}})(r,\theta,z).$$

Par construction, les problèmes $\left[\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}}\right]$ et $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ sont équivalents et la réduction est décrite par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \breve{V}_0 & \stackrel{(\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}})}{\longrightarrow} & \breve{F}_0\times\breve{G}_0 \\ {\scriptstyle\Phi_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi_F\times\Phi_G} \\ V & \stackrel{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})}{\longrightarrow} & F_0\times G_0 \end{array}$$

Finalement, si $\left[\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}}\right]$ est axisymétrique et si les données $\breve{f}$ et $\breve{g}$ sont axisymétriques, alors on a l'équivalence entre i) et ii) :

i) $\breve{v}$ est solution du problème $\left[\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}}\right]$ et est axisymétrique,

ii) v est solution du problème $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$.

En plus, si $\left[\breve{\boldsymbol{A}},\breve{\boldsymbol{B}}\right]$ est bien posé, toute solution $\breve{v}$ associée à des données axisymétriques est axisymétrique.

1.2.3 Problèmes axisymétriques avec données quelconques

On peut transformer les problèmes axisymétriques avec des données non nécessairement axisymétriques, en problèmes invariants par rotation. On commence par définir $\tilde{\Omega}$ comme un produit :

$$\tilde{\Omega} = \{(r, \theta, z);\ \ (r, z) \in \Omega,\ -\pi \leq \theta \leq \pi\}\,. \tag{1.2.15}$$

Proposition 1.2.3 *On suppose que le problème* $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ *est axisymétrique et que* $(\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}})$ *est défini sur un espace* $\breve{V}$ *à valeurs dans un espace produit* $\breve{F} \times \breve{G}$*. Alors il existe des espaces de fonctions* $\tilde{V}$*,* $\tilde{F}$ *et* $\tilde{G}$*, définies sur* $\tilde{\Omega}$*, tels que les fonctions suivantes sont des isomorphismes :*

$$\Phi_V : \breve{V} \longrightarrow V \qquad \Phi_F : \breve{F} \longrightarrow F \qquad \Phi_G : \breve{G} \longrightarrow G$$

$$\Phi_V\ \breve{\boldsymbol{v}}(r, \theta, z) = (I_\theta \breve{\boldsymbol{v}})(r, \theta, z) \quad \Phi_F\ \breve{\boldsymbol{f}}(r, \theta, z) = (I_\theta \breve{\boldsymbol{f}})(r, \theta, z) \quad \Phi_G\ \breve{\boldsymbol{g}}(r, \theta, z) = (J_\theta \breve{\boldsymbol{g}})(r, \theta, z)$$

En plus, les opérateurs $\tilde{\boldsymbol{A}}\,(r, z; \partial_r, \partial_\theta, \partial_z)$ et $\tilde{\boldsymbol{B}}\,(r, z; \partial_r, \partial_\theta, \partial_z)$ donnés par (1.2.14) sont tels que les problèmes $\left[\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}}\right]$ et $\left[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}\right]$ sont équivalents et la réduction est décrite par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\breve{V} & \stackrel{(\breve{\boldsymbol{A}}, \breve{\boldsymbol{B}})}{\longrightarrow} & \breve{F} \times \breve{G} \\
{\scriptstyle \Phi_V}\ \downarrow & & \downarrow\ {\scriptstyle \Phi_F \times \Phi_G} \\
V & \stackrel{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})}{\longrightarrow} & F \times G
\end{array}$$

Un moyen naturel de réduire un problème axisymétrique défini sur $\breve{\Omega}$ en une suite de problèmes posés sur Ω est d'utiliser le développement de Fourier par rapport à la variable angulaire θ. Ce cadre est d'autant plus intéressant que le problème réduit ne dépend pas de θ et donc le problème initial induit une suite de problèmes complètement découplés.

Soit $\breve{\boldsymbol{v}}$ une fonction définie sur $\breve{\Omega}$ et soit $\tilde{\boldsymbol{v}} = I_\theta \breve{\boldsymbol{v}}$ la fonction correspondante définie dans $\tilde{\Omega}$. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ on associe le coefficient de Fourier

$$\boldsymbol{v}^k\,(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\boldsymbol{v}}(r, \theta, z) e^{-ik\theta} d\theta. \tag{1.2.16}$$

Alors le problème $\left[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}\right]$ est équivalent à la famille dénombrable des problèmes réduits suivants :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{f}^k & \textit{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{v}^k = \boldsymbol{g}^k & \textit{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.2.17}$$

où les opérateurs $\boldsymbol{A}_k$ et $\boldsymbol{B}_k$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_k\left(r,z;\partial_r,\partial_z\right) &= \tilde{\boldsymbol{A}}\left(r,z;\partial_r,ik,\partial_z\right), \\ \boldsymbol{B}_k\left(r,z;\partial_r,\partial_z\right) &= \tilde{\boldsymbol{B}}\left(r,z;\partial_r,ik,\partial_z\right). \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Remarque 1.2.3 *Si les fonctions $\breve{\boldsymbol{v}}$, $\breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$ sont axisymétriques, tous leurs coefficients de Fourier sont nuls, sauf $\boldsymbol{v}^0$, $\boldsymbol{f}^0$et $\boldsymbol{g}^0$ respectivement et le problème $[\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0]$ coïncide avec le problème $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$.*

1.3 Exemples

Afin d'appliquer ce qui précède à des problèmes physiques réels tels que le problème de Laplace ou celui de Stokes, on commence par écrire les différents opérateurs qui interviennent en coordonnés cylindriques, dans les deux cas scalaire et vectoriel.

Soit $(\boldsymbol{\tau}_r,\boldsymbol{\tau}_\theta,\boldsymbol{\tau}_z)$ une base cylindrique orthonormée associée à la base $\left(\boldsymbol{\tau}_x,\boldsymbol{\tau}_y,\boldsymbol{\tau}_z\right)$ cartésienne. On a les formules de bases :

$$\partial_x = \cos\theta\ \partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\ \partial_\theta \quad \text{et} \quad \partial_y = \sin\theta\ \partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\ \partial_\theta. \tag{1.3.1}$$

On en déduit les formules suivantes.

1) *Cas scalaire :*

	Coordonnées cartésiennes	**Coordonnées cylindriques**
$\nabla\breve{v}$	$\partial_x\breve{v}\ \boldsymbol{\tau}_x + \partial_y\breve{v}\ \boldsymbol{\tau}_y + \partial_z\breve{v}\ \boldsymbol{\tau}_z$	$\partial_r v\ \boldsymbol{\tau}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta v\ \boldsymbol{\tau}_\theta + \partial_z v\ \boldsymbol{\tau}_z$
$\Delta\breve{v}$	$\partial_x^2\breve{v} + \partial_y^2\breve{v} + \partial_z^2\breve{v}$	$\partial_r^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r}\partial_\theta^2 v + \partial_z^2 v$

2) *Cas vectoriel :*

Pour le cas vectoriel, on rappelle qu'un vecteur $\breve{\boldsymbol{v}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $v_x\boldsymbol{\tau}_x + v_y\boldsymbol{\tau}_y + v_z\boldsymbol{\tau}_z$ et en coordonnées cylindriques $v_r\boldsymbol{\tau}_r + v_\theta\boldsymbol{\tau}_\theta + v_z\boldsymbol{\tau}_z$ ce qui implique que

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \qquad \text{et} \quad v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta, \tag{1.3.2}$$

et on a

	Coordonnées cartésiennes	**Coordonnées cylindriques**
$div\ \breve{\boldsymbol{v}}$	$\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$	$\partial_r v_r + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r}\partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z$
$\Delta \breve{\boldsymbol{v}}$	$\left(\partial_x^2 v_x + \partial_y^2 v_x + \partial_z^2 v_x\right) \boldsymbol{\tau}_x +$ $\left(\partial_x^2 v_y + \partial_y^2 v_y + \partial_z^2 v_y\right) \boldsymbol{\tau}_y +$ $\left(\partial_x^2 v_z + \partial_y^2 v_z + \partial_z^2 v_z\right) \boldsymbol{\tau}_z$	$(\partial_r^2 v_r + \frac{1}{r}\partial_r v_r + \frac{1}{r}\partial_\theta^2 v_r + \partial_z^2 v_r$ $- \frac{1}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2}\partial_\theta v_\theta)\boldsymbol{\tau}_r$ $+(\partial_r^2 v_\theta + \frac{1}{r}\partial_r v_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta^2 v_\theta + \partial_z^2 v_\theta$ $- \frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{2}{r^2}\partial_\theta v_r)\boldsymbol{\tau}_\theta$ $+ \left(\partial_r^2 v_z + \frac{1}{r}\partial_r v_z + \frac{1}{r}\partial_\theta^2 v_z + \partial_z^2 v_z\right) \boldsymbol{\tau}_z$

1.4 Espaces de Sobolev à poids

Par le changement de variables des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques, la mesure $dxdydz$ se transforme en $rdrd\theta dz$. En écrivant le problème de Laplace ou celui de Stokes sous forme variationnelle réduite définie sur Ω, il apparaît des mesures comme $rdrdz$ ou $r^{-1}drdz$. Ce changement de mesure donne lieu à de nouveaux espaces de Sobolev à poids.

Définition 1.4.1 *1) On définit l'espace*

$$L^2_{\pm 1}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable}, \, (\int_\Omega |u^2(r,z)| r^{\pm 1} drdz)^{\frac{1}{2}} < +\infty\} \tag{1.4.1}$$

qui est un espace de Hilbert quand il est muni de la norme suivante

$$||u||_{L^2_{\pm 1}(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^2 (r,z) r^{\pm 1} drdz)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit l'espace

$$H^m_1(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable}, \, (\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{k} ||\partial_r^\ell \partial_z^{k-\ell} u||^2_{L^2_1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} < +\infty\} \tag{1.4.2}$$

qui est un espace de Hilbert quand il est muni de la norme suivante

$$||u||_{H^m_1(\Omega)} = (\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{k} ||\partial_r^\ell \partial_z^{k-\ell} u||^2_{L^2_1(\Omega)})^{\frac{1}{2}};$$

il est aussi muni de la semi norme

$$|u|_{H_1^m(\Omega)} = \Big(\sum_{\ell=0}^{m} ||\partial_r^\ell \partial_z^{m-\ell} u||^2_{L_1^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3) Pour s réel positif non entier, on définit l'espace $H_1^s(\Omega)$ par interpolation entre l'espace $H_1^{[s]+1}(\Omega)$ et $H_1^{[s]}(\Omega)$, où $[s]$ désigne la partie entière de s.

4) On définit l'espace de Hilbert $V_1^1(\Omega)$, muni de la norme $(||.||^2_{H_1^1(\Omega)} + ||.||^2_{L^2_{-1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$ par :

$$V_1^1(\Omega) = H_1^1(\Omega) \cap L^2_{-1}(\Omega). \tag{1.4.3}$$

1.5 Fonctions axisymétriques

On étudie séparément les cas covariant et contravariant, qui correspondent respectivement aux fonctions invariantes par rotation et axisymétriques avec $I_\eta = R_{-\eta}$.

1.5.1 Cas covariant

On considère les fonctions de $H^s(\breve{\Omega})$ qui sont invariantes par rotation dans le sens (1.2.7). On note l'espace correspondant $\breve{H}^s(\breve{\Omega})$. Soit $\breve{v} \in \breve{H}^s(\breve{\Omega})$, $\breve{v}$ est caractérisé par l'existence dune fonction v définie sur Ω par :

$$v\,(r,z) = \breve{v}\,(x,y,z)\,. \tag{1.5.1}$$

Théorème 1.5.1 *Soit s un réel positif, alors l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \breve{H}^s(\breve{\Omega}) & \longrightarrow & H_+^s(\Omega) \\ \breve{v} & \longmapsto & v \end{array}$$

est un isomorphisme, où $H_+^s(\Omega)$ est défini comme suit :

i) si s n'est pas un entier pair

$$H_+^s(\Omega) = \left\{ w \in H_1^s(\Omega), \partial_r^{2j-1} w_{/\Gamma_0} = 0,\ et\ 1 \leq j < s/2 \right\}, \tag{1.5.2}$$

muni de la norme $||.||_{H_+^s(\Omega)} = ||.||_{H_1^s(\Omega)}$, *ii) si s est un entier pair*

$$H^s_+(\Omega) = \left\{w \in H^s_1(\Omega), \partial_r^{2j-1} w_{/\Gamma_0} = 0,\ 1 \leq j < s/2 \ \textit{et}\ \partial_r^{s-1} w \in L^2_{-1}(\Omega)\right\} \qquad (1.5.3)$$

muni de la norme $||w||_{H^s_+(\Omega)} = \left(||w||^2_{H^s_1(\Omega)} + ||\partial_r^{s-1} w||^2_{L^2_{-1}(\Omega)}\right)^{1/2}$.

1.5.2 Cas contravariant

Soit $\breve{\boldsymbol{H}}^s(\breve{\Omega})$ l'espace des fonctions $\breve{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \boldsymbol{H}^s(\breve{\Omega})$ qui vérifient (1.2.10) avec $I_\eta = R_{-\eta}$. On considère la fonction invariante par rotation $\tilde{\boldsymbol{v}} = (v_r, v_\theta, v_z) = I_\theta \breve{\boldsymbol{v}}$, alors on a :

$$\begin{aligned} v_r &= \cos\theta\ v_x + \sin\theta\ v_y \\ v_\theta &= -\sin\theta\ v_x + \cos\theta\ v_y \\ v_z &= v_z. \end{aligned} \qquad (1.5.4)$$

En conséquence de la Proposition 1.2.1 on a :

$$\begin{aligned} \forall \eta \quad &\in \quad [-\pi, \pi],\ R_{-\eta}(\breve{\boldsymbol{v}} \circ R_\eta) = \breve{\boldsymbol{v}} \\ &\Longleftrightarrow \quad v_r, v_\theta, v_z \text{ sont invariants par rotations.} \end{aligned}$$

Théorème 1.5.2 *Soit s un réel positif alors l'application :*

$$\breve{\boldsymbol{H}}^s(\breve{\Omega}) \underset{\breve{\boldsymbol{v}} \longmapsto \tilde{\boldsymbol{v}}(v_r, v_\theta, v_z)}{\longrightarrow} H^s_-(\Omega) \times H^s_-(\Omega) \times H^s_+(\Omega)$$

est bien définie et injective où $H^s_-(\Omega)$ est défini comme suit :

i) si s n'est pas un entier impair

$$H^s_-(\Omega) = \left\{w \in H^s_1(\Omega), \partial_r^{2j} w_{/\Gamma_0} = 0,\ \textit{et}\ 1 \leq j < \frac{s-1}{2}\right\} \qquad (1.5.5)$$

muni de la norme

$$||w||_{H^s_-(\Omega)} = ||w||_{H^s_1(\Omega)},$$

ii) si s est un entier impair

$$H^s_-(\Omega) = \left\{w \in H^s_1(\Omega), \partial_r^{2j} w_{/\Gamma_0} = 0,\ 1 \leq j < \frac{s-1}{2}\ \textit{et}\ \partial_r^{s-1} w \in L^2_{-1}(\Omega)\right\}, \qquad (1.5.6)$$

muni de la norme

$$||w||_{H^s_-(\Omega)} = \left(||w||^2_{H^s_1(\Omega)} + ||\partial_r^{s-1} w||^2_{L^2_{-1}(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

1.6 Coefficients de Fourier

Le but ici est d'étendre les résultats de la section précédente aux espaces standards de Sobolev $H^s(\breve{\Omega})$.

Définition 1.6.1 *Soit $\breve{v} \in H^s(\breve{\Omega})$. On définit, comme dans (1.2.16), les coefficients de Fourier de $\breve{v}$ notés v^k par :*

$$v^k(r,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{v}(r,\theta,z)\, e^{-ik\theta} d\theta. \tag{1.6.1}$$

On définit aussi la troncature de la série de Fourier pour chaque entier positif K par :

$$\breve{v}_K(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} v^k(r,z)\, e^{ik\theta} \tag{1.6.2}$$

On traite comme précédemment les deux cas covariant et contravariant.

1.6.1 Cas covariant

Théorème 1.6.1 *1) Soit s un réel positif alors l'application suivante est un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \breve{H}^s(\breve{\Omega}) & \longrightarrow & \prod_{k\in\mathbb{Z}} H^s_{(k)}(\Omega) \\ \breve{v} & \longmapsto & (v^k)_{k\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

où

i) si $|k| > s-1$, $H^s_{(k)}(\Omega) = V^s_1(\Omega)$ muni de la norme

$$||w||_{H^s_{(k)}(\Omega)} = \left(||w||^2_{H^s_1(\Omega)} + |k|^{2s} ||r^{-s}w||^2_{L^2_{-1}(\Omega)} \right)^{1/2}, \tag{1.6.3}$$

ii) si $|k| \leq s-1$

$$H^s_{(k)}(\Omega) = \begin{cases} \left\{ w \in H^s_+(\Omega), \partial^j_r w_{/\Gamma_0} = 0,\ 1 \leq j \leq |k|-1 \right\}, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \left\{ w \in H^s_-(\Omega), \partial^j_r w/_{\Gamma_0} = 0,\ 1 \leq j \leq |k|-1 \right\}, & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases} \tag{1.6.4}$$

muni de la norme

$$||w||_{H^s_{(k)}(\Omega)} = \begin{cases} ||w||_{H^s_+(\Omega)}, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ ||w||_{H^s_-(\Omega)}, & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a en plus l'équivalence suivante des normes :

$$c||\breve{v}||_{H^s(\breve{\Omega})} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||v^k||^2_{H^s_{(k)}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq c'||\breve{v}||_{H^s(\breve{\Omega})}. \tag{1.6.5}$$

2) Soit t un réel positif tel que $t \leq s$. Il existe une constante c telle que pour tout entier naturel K, on a :

$$||\breve{v} - \breve{v}_K||_{H^t(\breve{\Omega})} \leq cK^{t-s}||\breve{v}||_{H^s(\breve{\Omega})},\ \forall \breve{v} \in H^s(\breve{\Omega}). \tag{1.6.6}$$

1.6.2 Cas contravariant

Théorème 1.6.2 *Soit s un réel positif. On introduit l'espace $H^s_{(k)*}(\Omega)$ comme suit :*

i) si $|k| > s$, $H^s_{(k)*}(\Omega) = V^s_1(\Omega)$,

ii) si $|k| \leq s$,

$$H^s_{(k)*}(\Omega) = \begin{cases} \left\{w \in H^s_-(\Omega), \partial^j_r w_{/\Gamma_0} = 0,\ 1 \leq j \leq |k| - 2\right\}, & \textit{si } k \textit{ est pair,} \\ \left\{w \in H^s_+(\Omega), \partial^j_r w_{/\Gamma_0} = 0,\ 1 \leq j \leq |k| - 2\right\}, & \textit{si } k \textit{ est impair.} \end{cases} \tag{1.6.7}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^s(\breve{\Omega}) &\longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{Z}} \boldsymbol{H}^s_{(k)}(\Omega) \\ \breve{\boldsymbol{v}} &\longmapsto \left(v^k_r, v^k_\theta, v^k_z\right)_{k\in\mathbb{Z}} = (\boldsymbol{v}^k)_{k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme, où $\boldsymbol{H}^s_{(k)}(\Omega)$ est l'espace des $\left(w^k_r, w^k_\theta, w^k_z\right) \in H^s_{(k)*}(\Omega)\times H^s_{(k)*}(\Omega)\times H^s_{(k)}(\Omega)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \partial^{|k|-1}_r(w_r + \frac{ik}{|k|}w_\theta) \in L^2_{-1}(\Omega) & \textit{si } |k| = s, \\ \partial^{|k|-1}_r(w_r + \frac{ik}{|k|}w_\theta)_{/\Gamma_0} = 0 & \textit{si } |k| < s, \end{cases}$$

avec

1) Si $|k| \neq s$

$$||\,(w_r, w_\theta, w_z)\,||_{\mathbf{H}^s_{(k)}(\Omega)} = \left(||w_r||^2_{H^s_{(k)*}(\Omega)} + ||w_\theta||^2_{H^s_{(k)*}(\Omega)} + ||w_z||^2_{H^s_{(k)}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2) Si $|k| = s$

$$\begin{aligned} ||\,(w_r, w_\theta, w_z)\,||_{\mathbf{H}^s_{(k)}(\Omega)} &= (||w_r||^2_{H^s_{(k)*}(\Omega)} + ||w_\theta||^2_{H^s_{(k)*}(\Omega)} + ||w_z||^2_{H^s_{(k)}(\Omega)} \\ &\quad + ||\partial^{|k|-1}_r(w_r + \frac{ik}{|k|}w_\theta)||^2_{L^2_{-1}(\Omega)}\ )^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Et on a l'équivalence suivante :

$$c||\breve{\boldsymbol{v}}||_{\boldsymbol{H}^s(\breve{\Omega})} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||\boldsymbol{v}^k||^2_{\boldsymbol{H}^s_{(k)}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c'||\breve{\boldsymbol{v}}||_{\boldsymbol{H}^s(\breve{\Omega})}. \tag{1.6.8}$$

1.6.3 Le problème de Laplace

On considère le problème de Laplace tridimensionnel dans $\breve{\Omega}$

$$\begin{cases} -\Delta\breve{u} = \breve{f} & \text{dans } \breve{\Omega}, \\ \breve{u} = \breve{g} & \text{sur } \partial\breve{\Omega}. \end{cases} \tag{1.6.9}$$

Si $\breve{f}$ et $\breve{g}$ sont invariants par rotation autour de l'axe (Oz), alors le problème (1.6.9) se ramène au problème défini sur Ω par

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u - \frac{1}{r}\partial_r u - \partial_z^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.6.10}$$

où u, f et g sont des fonctions de r et z, Ω et Γ sont définis dans la section 1.

Si $\breve{f}$ ou $\breve{g}$ ne sont pas invariants par rotation, alors le problème (1.6.9) se ramène à un nombre dénombrable de problèmes définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u^k - \frac{1}{r}\partial_r u^k - \partial_z^2 u^k + \frac{k^2}{r^2}u^k = f^k & \text{dans } \Omega, \\ u^k = g^k & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{1.6.11}$$

où, pour k entier relatif, u^k, f^k et g^k sont les coefficients de Fourier respectivement de $\breve{u}$, $\breve{f}$ et $\breve{g}$, comme définis dans (1.6.1).

1.6.4 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème (1.6.9) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \breve{u} \text{ dans } H^1(\breve{\Omega}) \\ \text{avec } \ \breve{u} - \breve{g} \text{ dans } H^1_0(\breve{\Omega}), \text{ tel que} \\ \breve{a}\,(\breve{u}, \breve{v}) =< \breve{f}, \breve{v} >, \ \forall \breve{v} \in H^1_0(\breve{\Omega}), \end{cases} \tag{1.6.12}$$

où $\breve{a}\,(\breve{u},\breve{v}) = \int\limits_{\breve{\Omega}} \nabla\breve{u}.\nabla\breve{v}\; d\breve{\Omega}$, et $<\breve{f},\breve{v}>= \int\limits_{\breve{\Omega}} \breve{f}\;\breve{v}\; d\breve{\Omega}$.

On note encore $\breve{g}$ un relèvement de la trace de $\breve{g}$ dans $H^1(\breve{\Omega})$. Par application du lemme de Lax Milgram, pour $\breve{f}$ dans $H^{-1}(\breve{\Omega})$ et $\breve{g}$ dans $H^1(\breve{\Omega})$, la problème (1.6.12) a une solution unique dans $H^1(\breve{\Omega})$.

1.6.4.1 Cas axisymétrique

On introduit l'espace

$$H^1_{1\diamond}(\Omega) = \{v \in H^1_1(\Omega)\,;\, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{1.6.13}$$

L'application $\mathcal{I}$ définie sur $\breve{H}^1_0(\breve{\Omega})$ à valeurs dans $H^1_{1\diamond}(\Omega)$ par

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(\breve{v}) = v, \\ &v(r,z) = \breve{v}(x,y,z) \end{aligned} \tag{1.6.14}$$

est un isomorphisme appelé opérateur de réduction. On note $H^1_{1\diamond}(\Omega)'$ l'espace dual de $H^1_{1\diamond}(\Omega)$. On a pour $f \in H^1_{1\diamond}(\Omega)'$, $\breve{f} \in H^{-1}(\breve{\Omega})$ et

$$\forall v \in H^1_{1\diamond}(\Omega),\; <f,v>=<\breve{f},\breve{v}>.$$

(On rappelle que $<f,v>= \int_\Omega f\; v\; rdrdz$ si f et $g \in L^2_1(\Omega)$).

Soit g l'image de $\breve{g}$ par l'isomorphisme

$$\breve{H}^1(\breve{\Omega}) \longrightarrow H^1_1(\Omega)$$

avec $u - g$ appartenant à $H^1_{1\diamond}(\Omega)$, voir [8, **Chapitre II**].

On définit la forme bilinéaire a associée à $\breve{a}$ par

$$a(u,v) = \breve{a}\,(\breve{u},\breve{v}) \quad \forall (u,v) \in H^1_1(\Omega)$$

et qui est donnée par

$$a(u,v) = \textstyle\int_\Omega (\partial_r u \partial_r v + \partial_z u \partial_z v)\; rdrdz.$$

Le problème (1.6.10) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } H_1^1(\Omega), \\ \text{avec } u - g \text{ dans } H_{1\diamond}^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \forall v \in H_{1\diamond}^1(\Omega)\,, \quad a\,(u,v) = < f, v > . \end{cases} \tag{1.6.15}$$

Proposition 1.6.1 *La forme $a\,(.,.)$ est elliptique sur $H_{1\diamond}^1(\Omega)$. Pour tout f dans $H_{1\diamond}^1(\Omega)'$ et g dans $H_1^1(\Omega)$, le problème (1.6.15) a une unique solution. Elle coïncide avec l'image de $\breve{u}$ solution du problème (1.6.12) par $\mathcal{I}$ définie dans (1.6.14), avec $\breve{f}$ dans $H^{-1}(\breve{\Omega})$ et $\breve{g}$ dans $H^1(\breve{\Omega})$. De plus si on suppose que $f \in L_1^2(\Omega)$, alors il existe $C > 0$ telle que*

$$||u||_{H_1^1(\Omega)} \leq C(||f||_{L_1^2(\Omega)} + ||g||_{H_1^1(\Omega)}).$$

1.6.4.2 Cas général

Dans le cas général, on constate d'après le théorème 1.6.1 que si $\breve{v}$ est dans $H^1(\breve{\Omega})$, alors son coefficient de Fourier v^0 d'ordre 0 est dans l'espace $H_1^1(\Omega)$ alors que pour $k \neq 0$, $v^k \in V_1^1(\Omega)$. Pour cela on a besoin d'introduire l'espace

$$V_{1\diamond}^1(\Omega) = \{v \in V_1^1(\Omega)\,;\, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{1.6.16}$$

On introduit maintenant la forme sesquilinéaire a_k définie sur $V_1^1(\Omega) \times V_1^1(\Omega)$ par :

$$a_k(u,v) = \int_\Omega (\partial_r u\ \partial_r \bar{v} + \partial_z u\ \partial_z \bar{v})\ r dr dz + k^2 \int_\Omega u\bar{v} r^{-1} dr dz.$$

On a pour $\breve{u}$ et $\breve{v}$ dans $H^1(\breve{\Omega})$:

$$\sum_k a_k(u^k, v^k) = \breve{a}(\breve{u}, \breve{v}).$$

On considère pour $k \neq 0$ le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^k \text{ dans } V_1^1(\Omega), \\ \text{avec } u^k - g^k \text{ dans } V_{1\diamond}^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \forall v \in V_{1\diamond}^1(\Omega)\,, \quad a_k\left(u^k,v\right) = < f^k, v > . \end{cases} \tag{1.6.17}$$

Proposition 1.6.2 *Soit k un entier non nul. Pour $f^k \in V^1_{1\diamond}(\Omega)'$ et $g \in V^1_1(\Omega)$, le problème (1.6.17) a une unique solution. Elle coïncide avec le $k^{ème}$ coefficient de Fourier u^k de $\breve{u}$ solution du problème (1.6.12) où f^k et g^k sont les $k^{ème}$ coefficients de Fourier de $\breve{f}$ et $\breve{g}$. De plus il existe une constante $C > 0$ indépendante de k telle que*

$$||u^k||_{H^1_{(k)}(\Omega)} \leq C(||f^k||_{L^2_1(\Omega)} + ||g^k||_{H^1_{(k)}(\Omega)}).$$

On finit ce paragraphe par un résultat d'approximation par troncature de séries de Fourier. Pour cela, on introduit pour m et s des entiers relatifs, l'espace $H^{m,s}(\breve{\Omega})$ par :

$$H^{m,s}(\breve{\Omega}) = \{\breve{v} \in H^m(\breve{\Omega});\ \partial^\ell_\theta \breve{v} \in H^m(\breve{\Omega}), 1 \leq \ell \leq s\}.$$

Si s n'est pas entier, on définit $H^{m,s}(\breve{\Omega})$ par interpolation entre $H^{m,[s]}(\breve{\Omega})$ et $H^{m,[s]+1}(\breve{\Omega})$. On signale aussi que la norme induite par la définition de cet espace est equivalente à la norme $(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + |k|^2)^s||v^k||^2_{H^m_{(k)}(\Omega)})$.

1.6.5 Approximation par troncature

Pour s réel strictement positif, on suppose que $(\breve{f}, \breve{g}) \in H^{-1,s}(\breve{\Omega}) \times H^{1,s}(\breve{\Omega})$ alors on a :

$$||\breve{u} - \breve{u}_{[K]}||_{H^1(\breve{\Omega})} \leq CK^{-s}(||\breve{f}||_{H^{-1,s}(\breve{\Omega})} + ||\breve{g}||_{H^{1,s}(\breve{\Omega})}),$$

où $\breve{u}$ est la solution du problème (1.6.9), et $\breve{u}_{[K]}$ son approximation obtenue par troncature de la série de Fourier définie dans (1.6.2).

1.6.6 Régularité

1.6.6.1 Cas axisymétrique

Pour $(f, g) \in H^{s-1}_+(\Omega) \times H^{s+1}_+(\Omega)$, s réel positif, la solution u du problème (1.6.9) n'est pas en général dans $H^{s+1}_+(\Omega)$. Ceci est dû au domaine Ω qui n'est pas régulier aux points e_i et c_i, voir figure 1.1.1 et 1.1.2. Toutefois il y a des conditions sur s pour que la solution u soit dans $H^{s+1}_+(\Omega)$.

La première est que s soit inférieur au minimum des $\frac{\pi}{\omega_j}$, où ω_j est l'angle au point e_j. La seconde est que s soit inférieur au minimum des $\nu_i^{(0)} + \frac{1}{2}$, où $\nu_i^{(0)}$ est le plus petit réel stictement positif solution du problème $P_\nu^0(\cos\alpha_i) = 0$ où α_i est l'angle au point c_i et P_ν^0 est la fonction de Legendre ($\nu > 0$) [8, Prop. 18. 10] et [2, Chap 8].

1.6.6.2 Cas général

Dans le cas général la première condition aux points e_i reste la même. Pour la deuxième, on considère P_ν^k au lieu du polynôme P_ν^0. P_ν^k est ici la fonction de Legendre de degré ν et d'ordre k et $\nu_i^{(k)}$ est le plus petit réel strictement positif solution du problème $P_\nu^k(\cos\alpha_i) = 0$.

On énonce maintenant un théorème qui va résumer les deux situations.

Théorème 1.6.3 *Soit $s > 0$*

1) Si $(f, g) \in H_+^{s-1}(\Omega) \times H_+^{s+1}(\Omega)$, $s < \frac{\pi}{\omega_j}$, $j = 1, .., J$, et $s < \nu_i^{(0)} + \frac{1}{2}$, $i = 1, .., I$, alors la solution u du problème (1.6.15) est dans $H_+^{s+1}(\Omega)$.

2) Si $(f^k, g^k) \in H_{(k)}^{s-1}(\Omega) \times H_{(k)}^{s+1}(\Omega)$, $s < \frac{\pi}{\omega_j}$, $j = 1, .., J$, et $s < \nu_i^{(k)} + \frac{1}{2}$, $i = 1, .., I$, alors la solution u^k du problème (1.6.17) est dans $H_{(k)}^{s+1}(\Omega)$.

3) Si $(\breve{f}, \breve{g}) \in H^{s-1}(\breve{\Omega}) \times H^{s+1}(\breve{\Omega})$, $s < \frac{\pi}{\omega_j}$, $j = 1, .., J$, et $s < \nu_i^{(k)} + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $i = 1, .., I$, alors la solution $\breve{u}$ du problème (1.6.9) est dans $H^{s+1}(\breve{\Omega})$ et elle vérifie :

$$||\breve{u}||_{H^{s+1}(\breve{\Omega})} \leq c(||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} + ||\breve{g}||_{H^{s+1}(\breve{\Omega})}).$$

1.6.7 Les singularités

On a vu dans le paragraphe précédent que les singularités du domaine ont une influence majeure sur la régularité de la solution u. Dans ce paragraphe on a choisi trois domaines d'études $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ (voir fig 1.6.1), qu'on va les adopter dans la partie numérique.

Dans ces cas de domaines, il n'y a pas de singularités de coins, (en effet en faisant tourner ces domaines autour de l'axe ($r = 0$), on ne vois que des arêtes). Pour cela

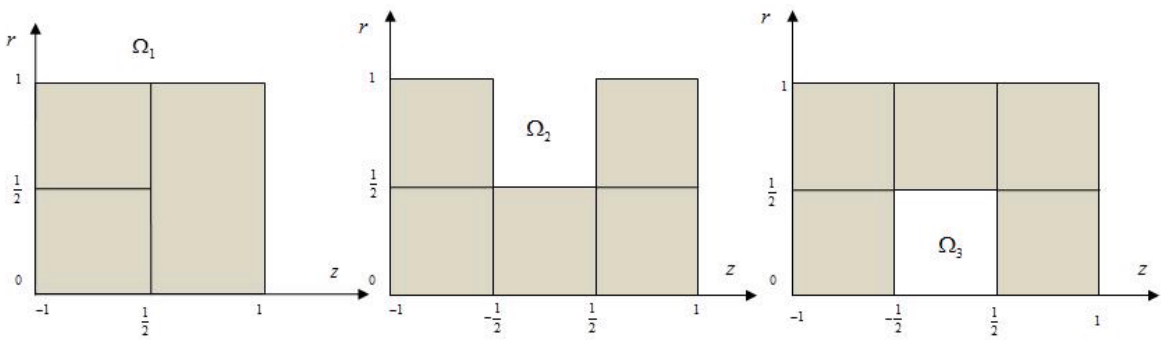

Fig. 1.6.1: Domaines d'étude

on se limitera à l'étude des fonctions singulières aux voisinages des arêtes.

1.6.7.1 ***Fonctions singulières au voisinage des arêtes***

Fixons e dans $\{e_1, e_2, .., e_6\}$ et $\mathcal{V}_e$ un voisinage de e dans Ω. On peut déterminer les fonctions singulières $S_e^{(k)\ell}$ du problème (1.6.11) pour chaque k dans $\mathbb{Z}$. L'avantage est que le terme dominant de $S_e^{(k)\ell}$ ne dépend pas de k et coïncide avec la fonction singulière $S_e^{\Delta\ell}$ du problème de Laplace bidimensionnel, [8, Chapitre II]. On a

$$S_e^{\Delta\ell} = \begin{cases} r_e^{\frac{\ell\pi}{\omega_e}} \sin(\frac{\ell\pi}{\omega_e}\theta_e) & si\ \frac{\ell\pi}{\omega_e} \notin \mathbb{N}, \\ r_e^{\frac{\ell\pi}{\omega_e}} [\log r_e \sin(\frac{\ell\pi}{\omega_e}\theta_e) + \theta_e \cos(\frac{\ell\pi}{\omega_e}\theta_e)] & si\ \frac{\ell\pi}{\omega_e} \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.6.18}$$

(r_e, θ_e) étant les coordonnées polaires de e . On choisit les points (r_e, θ_e) dans le repère tel que le secteur de sommet e vérifiant $0 < \theta_e < \omega_e$. Voir la figure 1.6.2.

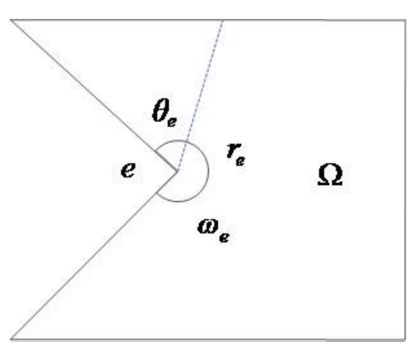

Fig. 1.6.2: Schéma explicatif

$$S_e^{(k)\ell} = S_e^{\Delta\ell} + r_e^{\frac{\ell\pi}{\omega_e}} \sum_{n\geq 0}\sum_{p\geq 1}\sum_{q\geq 0} k^n r_e^p \log^q r_e \varphi^e_{\ell npq}(\theta_e), \tag{1.6.19}$$

où $\varphi^e_{\ell npq}$ est une fonction régulière en θ_e.

On fait le changement de variables :

$$\begin{aligned} (r_e,\theta_e) &\longrightarrow (\bar{r}_e,\theta_e) = (|k|r_e,\theta_e) \\ &\text{si } \ k \neq 0 \text{ et} \\ S_e^{(k)\ell}(r_e,\theta_e) &= |k|^{-\frac{\ell\pi}{\omega_e}} \sum_{n\geq 0} S_e^{n\ell}(|k|r_e,\theta_e). \end{aligned} \tag{1.6.20}$$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 1.6.4 *Soit $e \in \{e_1, e_2, .., e_6\}$ et $\mathcal{V}_e$ un voisinage de e dans Ω disjoint avec de certains voisinages $\mathcal{V}_{e_j}$ de e_j , pour tout $e_j \in \{e_1, e_2, .., e_6\}\backslash\{e\}$. Soit χ_e une fonction de troncature de r_e à support dans $\mathcal{V}_e$ et qui vaut 1 dans un voisinage de e. Soit s un réel strictement positif et soit $(\breve{f}, \breve{g})$ dans $H^{s-1}(\breve{\Omega}) \times H^{s+1}(\breve{\Omega})$. Si $s \neq \frac{\ell\pi}{\omega_e}$, $\ell = 1, 2, ...$alors pour tout k, u^k vérifie :*

$$u^k = u^k_{reg} + \sum_{\ell} \gamma_e^{(k)\ell}.\chi_e(|k|r_e) S_e^{(k)\ell} \ \textit{dans } \mathcal{V}_e\cap\Omega \ \textit{et } u^k_{reg} \in H^{s+1}_{(k)}(\mathcal{V}_e\cap\Omega) \tag{1.6.21}$$

où $S_e^{(k)\ell}$ est définie dans (1.6.20). Pour s vérifiant $0 < \frac{\ell\pi}{\omega_e} < s$ on a

$$||u^k_{reg}||_{H^{s+1}_{(k)}(\mathcal{V}_e\cap\Omega)} + (1+|k|^{s-\frac{\ell\pi}{\omega_e}})|\gamma_e^{(k)\ell}| \leq (||f^k||_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)} + ||g^k||_{H^{s+1}_{(k)}(\Omega)}). \tag{1.6.22}$$

On déduit de (1.6.21) que

$$\breve{u} = \breve{u}_{reg} + \sum_{\ell} \breve{u}_{sing\ \ell} \text{ avec } \breve{u}_{reg} \in H^{s+1}(\breve{\mathcal{V}}_e \cap \breve{\Omega}) \tag{1.6.23}$$

$\breve{u}_{reg}$ et $\breve{u}_{sing\ \ell}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \breve{u}_{reg} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^k_{reg}(r,z) e^{ik\theta} \\ \breve{u}_{sing\ \ell} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_e^{(k)\ell}.\chi_e(|k|r_e) S_e^{(k)\ell}(r,z) e^{ik\theta}. \end{aligned} \tag{1.6.24}$$

Le principal terme de $\breve{u}_{sing\ \ell}$ est $\gamma_e^\ell(\theta) S_e^{\Delta\ell}$, où

$$\gamma_e^\ell(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_e^{(k)\ell} e^{ik\theta} \text{ et } \gamma_e^\ell \in H^{s-\frac{\ell\pi}{\omega_e}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

1.6.7.2 Cas d'arête non convexe

On suppose que $\breve{f}$ soit dans $L^2(\breve{\Omega})$ et $\breve{g}$ dans $H^2(\breve{\Omega})$. Si $\omega_e > \pi$ alors

$$u^k = u^k_{reg} + \gamma_e^{(k)}.\chi_e(|k|r_e)S_e \text{ et } u^k_{reg} \in H^2_{(k)}(\mathcal{V}_e \cap \Omega) \tag{1.6.25}$$

avec $S_e = r_e^{\frac{\pi}{\omega_e}} \sin(\frac{\pi\theta_e}{\omega_e})$ et on a

$$\breve{u} = \breve{u}_{reg} + (\gamma_e * \hat{\chi}_e) \text{ dans } \breve{\mathcal{V}}_e$$

où

$$\gamma_e(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_e^{(k)}e^{ik\theta} \text{ et } \gamma_e * \hat{\chi}_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_e^{(k)}.\chi_e(|k|r_e)e^{ik\theta}$$

et $\gamma_e \in H^{1-\frac{\pi}{\omega_e}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

1.6.7.3 Estimations de bases

Les formules (1.6.19) et (1.6.20) du paragraphe précédent, nous mènent à définir les ensembles suivants.

i) pour $k = 0$, chaque fonction est la somme d'un nombre fini d'éléments de l'ensemble suivant

$$\begin{aligned} \pounds_e^{(0)\lambda,q} &= \{S_e^{(0)}, S_e^{(0)} = \chi_e(r_e^\lambda)r_e^\lambda \log(r_e)^q\varphi(\theta_e), \\ \varphi &\in \mathcal{C}^\infty[0,\omega_e] \text{ et } \varphi(0) = \varphi(\omega_e) = 0\}, \end{aligned} \tag{1.6.26}$$

avec $\lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_e} + p$ où p et $q \geq 0$.

ii) Pour $k \neq 0$, on note l'ensemble

$$\begin{aligned} \pounds_e^{(k)\lambda,q} &= \{S_e^{(k)}, S_e^{(k)} = \chi_e(|k|r_e^\lambda)r_e^\lambda \log(|k|r_e)^q\varphi(\theta_e), \\ \varphi &\in \mathcal{C}^\infty[0,\omega_e] \text{ et } \varphi(0) = \varphi(\omega_e) = 0\}. \end{aligned} \tag{1.6.27}$$

avec $\lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_e} + p$ où p et $q \geq 0$.

On définit les espaces $H^s_{\star+}(\Omega)$ et $H^s_{\star-}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} H^s_{\star+}(\Omega) &= L^2_1(\Lambda; D(A^{\frac{s}{2}})) \cap D(A_1^{\frac{s}{2}})(\Lambda; L^2(\Lambda)), \\ H^s_{\star-}(\Omega) &= L^2_{-1}(\Lambda; D(A^{\frac{s}{2}})) \cap D(A_1^{\frac{s}{2}})(\Lambda; L^2(\Lambda)) \end{aligned}$$

où A est l'opérateur de *Strum – Liouville* défini par :

$$A = -[(1-\xi^2)\psi^{'}]'$$

et A_1 et A_{-1} sont définis par :

$$\begin{aligned} A_1 &= -(1+\xi)^{-1}[(1-\xi)(1+\xi)^2\psi^{'}]', \\ A_{-1} &= -(1+\xi)[(1-\xi)\psi^{'}]'. \end{aligned}$$

Proposition 1.6.3 *1) La fonction $S_e^{(0)}$ définie dans* (1.6.26) *est dans $H^s_{\star+}(\Omega)$ pour $s < 2\lambda + 2$.*

2) La fonction $S_e^{(k)}$ définie dans (1.6.27) *est dans $H^s_{\star-}(\Omega)$ pour $s < 2\lambda + 2$ et on a*

$$\left\| S_e^{(k)} \right\|_{H^s_{\star-}(\Omega)} \leq c\,|k|^{\frac{s}{2}-\lambda-1} \ \textit{pour } k \neq 0.$$

Pour la preuve consulter [8, Chapitre V] et [24, Prop. 14].

On utilisera ces espaces pour améliorer les estimations.

On note $\Lambda =]-1,1[$, $\Sigma = (]-1,1[)^2$, $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur Λ de degré inférieur ou égal à N et $\mathbb{P}^*_N(\Lambda)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ qui s'annulent en -1. On introduit les opérateurs de projection orthogonale suivants :

$$\pi_N\ : L^2(\Lambda) \rightarrow \mathbb{P}_N(\Lambda),\ \pi_N^+\ : L^2_1(\Lambda) \rightarrow \mathbb{P}_N(\Lambda) \text{ et } \pi_N^-\ : L^2_{-1}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{P}^*_N(\Lambda).$$

On définit les opérateurs de projection orthogonale bidimensionnels par

$$\begin{aligned} \Pi_N^+ &= \pi_N^{+(\zeta)} \circ \pi_N^{(\xi)} : L^2_1(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{P}_N(\Sigma), \\ \Pi_N^- &= \pi_N^{-(\zeta)} \circ \pi_N^{(\xi)} : L^2_{-1}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{P}_N(\Sigma). \end{aligned}$$

voir [8, **Chapites I et II**].

Proposition 1.6.4

1) Pour tout s et tout t tels que $0 \leq 2t \leq s$, il existe c positif tel que pour tout $v \in H^s_{\star+}(\Sigma)$ on ait

$$||v - \Pi^+_N v||_{H^t_1(\Sigma)} \leq cN^{2t-s}||v||_{H^s_{\star+}(\Sigma)}.$$

2) Pour tout s et t tels que $0 \leq 2t \leq s$, il existe C positif tel que pour tout $v \in H^s_{\star-}(\Sigma)$ on ait

$$|v - \Pi^-_N v|_{H^t_1(\Sigma)} + ||v - \Pi^-_N v||_{L^2_{-1}(\Sigma)} \leq CN^{2t-s}||v||_{H^s_{\star-}(\Sigma)}.$$

Remarque 1.6.1 *1) Soit $\varepsilon > 0$, Si $s = 2\lambda + 2 - \varepsilon$, alors $\left\|S_e^{(k)}\right\|_{H^s_{\star+}(\Sigma)}$ et $\left\|S_e^{(k)}\right\|_{H^s_{\star-}(\Sigma)}$ sont majorées par $\varepsilon^{-q-\frac{1}{2}}$.*

2) On peut poser dans ce cas $\varepsilon = (\ell ogN)^{-1}$, et on a alors $N^\varepsilon = e$.

3) La proposition 1.6.4 reste vraie si on remplace Σ par Ω, où Ω est un rectangle quelconque (avec un côté sur l'axe).

Voir [8, Chapitre V] pour les détails.

Chapitre II

DISCRÉTISATION DU PROBLÈME DE LAPLACE PAR LA MÉTHODE DES JOINTS

2.1 Introduction

Dans cette partie on va utiliser la méthode des joints, pour discrétiser le problème de Laplace dans un domaine Ω qu'on décompose en sous domaines. Chaque sous-domaine est un rectangle de côtés parallèles aux axes $r = 0$ et $z = 0$. Ensuite on va considérer l'algorithme de Strang et Fix et mettre en évidence son importance dans l'amélioration de l'erreur entre la solution du problème continu et la solution discrète.

2.2 Géométrie de la décomposition

2.2.1 Géométrie

On décompose le domaine Ω en sous-domaines rectangulaires ouverts Ω_ℓ, $1 \leq \ell \leq L$, voir fig 1.6.1 de sorte que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\ell=1}^{L} \overline{\Omega}_\ell, \qquad \Omega_\ell \cap \Omega_m = \varnothing,\ 1 \leq \ell < m \leq L.$$

On note $\Gamma^{\ell,j}, 1 \leq j \leq 4$, les côtés de $\overline{\Omega}_\ell$ et $\gamma^{\ell t} = \partial\bar{\Omega}_\ell \cap \partial\bar{\Omega}_t$, $\ell \neq t$, quand $\overline{\Omega}_\ell$ et $\overline{\Omega}_t$ ont un côté commun. On désigne par $(\Omega_\ell)_{1\leq\ell\leq L_0}$ les rectangles tels que $\partial\overline{\Omega}_\ell \cap \Gamma_0 \neq \varnothing$ et par $(\Omega_\ell)_{L_0+1\leq\ell\leq L}$ ceux tels que $\partial\Omega_\ell \cap \Gamma_0 = \varnothing$, où L_0 est un entier naturel compris entre 1 et L. Pour $1 \leq \ell \leq L_0$, on note $\Omega_\ell =]0, r'_\ell\,[\times]\,z_\ell, z'_\ell[$ et pour $L_0 + 1 \leq \ell \leq L$, on note $\Omega_\ell =]r_\ell, r'_\ell\,[\times]\,z_\ell, z'_\ell[$.

2.2.2 Formules de quadrature

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats démontrés dans [8, **Chapitre III**]. On note $\xi_0 = -1$, $\xi_N = 1$ et $(\xi_i)_{1\leq i\leq N-1}$ les zéros du polynôme L'_N, où L_N désigne le polynôme de Legendre de degré N. Soit $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ l'espace des fonctions polynômiales définies sur Λ de degré $\leq N$. La formule de quadrature de Gauss-Lobatto sur l'intervalle $\Lambda =]-1,1[$ s'écrit

$$\forall \phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \quad \int_{-1}^{1} \phi(\xi)\, d\xi = \sum_{i=0}^{N} \phi(\xi_i)\, \rho_i, \tag{2.2.1}$$

où les ρ_i, $0 \leq i \leq N$, désignent les poids de Gauss-Lobatto pour la mesure $d\xi$. On définit un produit discret sur l'ensemble des fonctions continues sur Λ par :

$$(\phi,\psi)_N^0 = \sum_{j=0}^{N} \phi(\xi_j)\, \psi(\xi_j)\, \rho_i \tag{2.2.2}$$

et on a

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \|\phi_N\|^2_{L^2(\Lambda)} \leq (\phi_N,\phi_N)^0_N \leq 3\,\|\phi_N\|^2_{L^2(\Lambda)}.$$

Voir [8, (VI.I.4)]

Remarque 2.2.1 *On note que $(.,.)^0_N$ est un produit scalaire sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.*

On définit à présent une seconde formule de quadrature. Soient $\zeta_1 = -1$, $\zeta_{N+1} = 1$ et $(\zeta_j)_{2\leq j\leq N}$ les zéros du polynôme M'_N où M_N est défini par $M_N(\zeta) = \frac{L_N(\zeta)+L_{N+1}(\zeta)}{1+\zeta}$. On rappelle que la famille $(M_n)_n$ est orthogonale pour la mesure $(1+\zeta)\,d\zeta$. On considère la formule de quadrature :

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda), \int_{-1}^{1} \phi_N(\zeta)\,(1+\zeta)\, d\zeta = \sum_{i=1}^{N+1} \phi_N(\zeta_i)\, \omega_i, \tag{2.2.3}$$

où $\omega_i, 1 \leq i \leq N+1$, sont les poids de Gauss-Lobatto pour la mesure $(1+\zeta)\,d\zeta$. Le produit discret associé est défini, pour des fonctions ϕ et ψ continues, par :

$$(\phi,\psi)^1_N = \sum_{j=1}^{N+1} \phi(\zeta_j)\, \psi(\zeta_j)\, \omega_j, \tag{2.2.4}$$

et vérifie [8, lemme VI.I.4]

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \|\phi_N\|^2_{L^2_1(\Lambda)} \leq (\phi_N, \phi_N)^1_N \leq 4\|\phi_N\|^2_{L^2_1(\Lambda)}.$$

En combinant les formules (2.2.2) et (2.2.4), on obtient la formule de quadrature sur le carré $\Sigma =]-1,1[^2$:

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Sigma), \int_\Sigma \phi_N(\zeta,\xi)(1+\zeta)\, d\zeta d\xi = \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=0}^{N} \phi_N(\zeta_i,\xi_j)\,\omega_i\rho_j.$$

Le produit discret associé est donné par :

$$((\phi_N,\psi_N))_N = \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=0}^{N} \phi_N(\zeta_i,\xi_j)\,\psi_N(\zeta_i,\xi_j)\,\omega_i\rho_j.$$

Ceci nous permet d'avoir les inégalités suivantes

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_N(\Sigma), \|\phi_N\|^2_{L^2_1(\Sigma)} \leq ((\phi_N,\phi_N))_N \leq 12\|\phi_N\|^2_{L^2_1(\Sigma)}. \tag{2.2.5}$$

On peut aussi définir la formule de quadrature

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Sigma), \int_\Sigma \phi_N(\zeta,\xi)\, d\zeta d\xi = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \phi_N(\xi_i,\xi_j)\,\rho_i\rho_j$$

et le produit scalaire associé

$$((\phi_N,\psi_N))^1_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \phi_N(\xi_i,\xi_j)\,\psi_N(\xi_i,\xi_j)\,\rho_i\rho_j$$

et on a

$$\forall \phi_N \in \mathbb{P}_N(\Sigma), \|\phi_N\|^2_{L^2(\Sigma)} \leq ((\phi_N,\phi_N))^1_N \leq 9\|\phi_N\|^2_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.2.6}$$

Le changement de variable $r = \frac{1}{2}(1+\zeta)$ permet d'en déduire des formules d'intégration correspondant à la mesure rdr sur $[0,1]$.

Par transformations affines, on définit les formules de quadrature sur Ω_ℓ de la manière suivante. Pour $1 \leq \ell \leq L$, soient $(\xi_i^\ell)_{0\leq i\leq N_\ell}$ et $(\rho_i^\ell)_{0\leq i\leq N_\ell}$ respectivement les nœuds et poids de Gauss-Lobatto sur Ω_ℓ pour la mesure $d\xi$ et $(\zeta_j^\ell)_{1\leq j\leq N_\ell+1}$, $(\omega_j^\ell)_{1\leq j\leq N_\ell+1}$

ceux de Gauss-Lobatto pour la mesure rdr. Les nœuds ξ_i^ℓ, ζ_j^ℓ et les poids $\rho_i^\ell, \omega_j^\ell$ sont les nœuds et poids correspondant respectivement à $\xi_i, \zeta_j, \rho_i, \omega_j$ et sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned}
&\text{pour } 1 \leq \ell \leq L_0,\ \zeta_i^\ell = \tfrac{r_\ell}{2}\left(\zeta_i + 1\right),\ 1 \leq i \leq N_\ell + 1,\\
&\text{pour } L_0 + 1 \leq \ell \leq L,\ \xi_i^{(r)\ell} = \tfrac{\left(r'_\ell - r_\ell\right)}{2}\xi_i + \tfrac{\left(r'_\ell + r_\ell\right)}{2},\ 0 \leq i \leq N_\ell,\\
&\text{et pour } 1 \leq \ell \leq L,\ \xi_i^\ell = \tfrac{\left(z'_\ell - z_\ell\right)}{2}\xi_i + \tfrac{\left(z'_\ell + z_\ell\right)}{2},\ 0 \leq i \leq N_\ell.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Pour $1 \leq \ell \leq L_0$, on prend sur Ω_ℓ la formule déduite de celle de Gauss-Lobatto, pour la mesure $d\zeta$ sur $]-1, 1[$, dans la direction axiale et pour la mesure $(1 + \zeta)d\zeta$ dans la direction radiale. Pour $L_0 + 1 \leq \ell \leq L$, on prend sur Ω_ℓ la formule déduite de celle de Gauss-Lobatto, pour la mesure $d\zeta$ dans les deux directions. On définit un produit discret sur Ω pour $\phi, \psi \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$ par

$$\begin{aligned}
(\phi, \psi)_\delta = &\sum_{\ell=1}^{L_0} \sum_{i=1}^{N_\ell+1} \sum_{j=0}^{N_\ell} \phi|_{\Omega_\ell}\left(\zeta_j^\ell, \xi_i^\ell\right) \psi|_{\Omega^\ell}\left(\zeta_j^\ell, \xi_i^\ell\right) \omega_i^\ell \rho_j^\ell \\
&+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L} \sum_{i,j=0}^{N_\ell} \phi|_{\Omega_\ell}(\xi_i^{(r)\ell}, \xi_j^\ell) \psi|_{\Omega^\ell}(\xi_i^{(r)\ell}, \xi_j^\ell) \xi_i^{(r)\ell} \rho_i^\ell \rho_j^\ell.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

2.3 Le problème de Laplace : Cas axisymétrique

2.3.1 Problème continu

On considère le problème (1.6.10), avec g nul sur le bord Γ. Ω est décomposé en L sous-domaines disjoints. La forme bilinéaire $a\,(.,.)$ s'écrit, pour tout u et $v \in C^0\left(\bar{\Omega}\right)$,

$$a\,(u, v) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \nabla u_\ell\,(r, z) \,.\nabla v_\ell\,(r, z)\, rdrdz \tag{2.3.1}$$

où ∇v désigne le vecteur $(\partial_r v,\ \partial_z v)$. Et u_ℓ désigne la restriction de u à Ω_ℓ.

On introduit les espaces $\mathcal{X}_1^1$ et $\mathcal{X}_{1\diamond}^1$ par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1^1\,(\Omega) &= \{v = (v_1, .., v_\ell) \in \prod_{\ell=1}^{L} H_1^1\,(\Omega_\ell)\}\\
\mathcal{X}_{1\diamond}^1\,(\Omega) &= \{v \in \mathcal{X}_1^1\,(\Omega)\,, v = 0 \text{ sur } \Gamma\ \}.
\end{aligned}$$

On munit $\mathcal{X}_1^1(\Omega)$ de la norme $\|.\|_{\mathcal{X}_1^1}$ et de la semi norme $|.|_{\mathcal{X}_1^1}$ données par :

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{X}_1^1} &= (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}. \\ |v|_{\mathcal{X}_1^1} &= (\sum_{\ell=1}^{L} |v_\ell|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

On définit l'espace $\mathcal{H}^1_{1\diamond}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^1_{1\diamond}(\Omega) = \{v = (v_1, .., v_\ell) \in \prod_{\ell=1}^{L} H_1^1(\Omega_\ell) \\ &v_\ell = 0 \text{ sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_\ell) \setminus \Gamma_0 \text{ et } v_m = v_\ell \text{ sur } \gamma^{m\ell}, 1 \leq m < \ell \leq L\}, \end{aligned}$$

et on le munit de la norme induite :

$$\|v\|_{\mathcal{X}_1^1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$$

Vue la continuité des traces sur les interfaces, $\mathcal{H}^1_{1\diamond}(\Omega)$ est isomorphe à l'espace $H^1_{1\diamond}(\Omega)$ et on a la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Le problème (1.6.10) admet la formulation variationnelle suivante :*

$$\begin{cases} Trouver\ u \in H^1_{1\diamond}(\Omega),\ vérifiant \\ a(u, v) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} (f v_\ell)(r, z)\, r dr dz,\ \forall v \in H^1_{1\diamond}(\Omega). \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Et pour toute donnée f dans $L_1^2(\Omega)$, le problème (2.3.3) admet une solution unique qui vérifie :

$$\|u\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq c\,\|f\|_{L_1^2(\Omega).} \tag{2.3.4}$$

où la norme $\|.\|_{L_1^2(\Omega).}$ est définie par

$$\|.\|_{L_1^2(\Omega)} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|.\|^2_{L_1^2(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.5}$$

Preuve 1) Soit u, v et $w \in H^1_{1\diamond}(\Omega)$. On a au sens des distributions, $\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u + \partial_z^2 u$ et la formule de Green donne :

$$\begin{aligned} -\int_\Omega (\Delta u) w r dr dz &= -\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{m=\ell+1}^{L}\int_{\gamma^{\ell m}}(\frac{\partial u}{\partial n_\ell})[w]d\tau \\ &+\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}\nabla u_\ell \nabla w_\ell r dr dz, \end{aligned}$$

où $[w]$ est le saut de continuité à travers $\gamma^{\ell m}$. En effet sur $\gamma^{\ell m}$ on a $u_{\ell|\gamma^{\ell m}} = u_{m|\gamma^{\ell m}}$. Comme $f \in L^2_1(\Omega)$, on a $u \in H^s_1(\Omega)$, $s \geq \frac{3}{2}$ [8, Chapitre II] ce qui implique que :

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial n_\ell} = -\frac{\partial u_m}{\partial n_m} .$$

Le terme $\sum\limits_{\ell=1}^{L}\sum\limits_{m=\ell+1}^{L}\int_{\gamma^{\ell m}}(\frac{\partial u}{\partial n_\ell})[w]d\tau$ s'annule puisque $[w] = w_{\ell|\gamma^{\ell m}} - w_{m|\gamma^{\ell m}} = 0$. On en déduit que u est solution du problème (2.3.3).

2) Pour l'existence et l'unicité on a besoin de montrer la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire a sur l'espace de Hilbert $H^1_{1\diamond}(\Omega)$ à savoir qu'il existe deux constantes c et c' telles que :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq c\|u\|_{\mathcal{X}^1_1}\|v\|_{\mathcal{X}^1_1} \quad \forall (u,v) \in H^1_{1\diamond}(\Omega) \times H^1_{1\diamond}(\Omega), \\ a(u,u) &\geq c'\|u\|^2_{\mathcal{X}^1_1} \quad \forall u \in H^1_{1\diamond}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

a) La première inégalité est obtenue facilement, avec $c = 1$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur chaque sous domaine Ω_ℓ.

b) Pour la deuxième inégalité, on écrit $a(u,u) = |u|^2_{\mathcal{X}^1_1}$ et on suppose par l'absurde que pour chaque entier n strictement positif, il existe $u_n \in H^1_{1\diamond}(\Omega)$ non nul tel que

$$\|u_n\|_{\mathcal{X}^1_1} \geq n\,|u_n|_{\mathcal{X}^1_1} .$$

On pose

$$\frac{u_n}{\|u_n\|_{\mathcal{X}^1_1}} = v_n.$$

On a alors $\|v_n\|_{\mathcal{X}^1_1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|_{\mathcal{X}^1_1} = 0$. La suite $\left(v_{n|\Omega_\ell}\right)_n$ est donc bornée dans $H^1_1(\Omega_\ell)$. Comme l'espace $H^1_1(\Omega_\ell)$ est un espace de Hilbert (donc réflexif) et l'injection de $H_1^1(\Omega_\ell)$ dans $L_1^2(\Omega_\ell)$ est compacte [8], il existe une sous-suite de $(v_n)_n$ notée encore $(v_n)_n$ qui converge faiblement dans $H_1^1(\Omega_\ell)$ et fortement dans $L_1^2(\Omega_\ell)$ vers un élément $v_\ell \in H_1^1(\Omega_\ell)$. On en déduit que

$$0 = \liminf_{n\to+\infty} |v_n|_{\mathcal{X}_1^1} \geq \sum_{\ell=1}^{L} \|\nabla v_\ell\|^2_{L_1^2(\Omega_\ell)}.$$

Ceci implique que v_ℓ est constante dans Ω_ℓ pour tout ℓ et que par conséquent $v_\ell = 0$ pour tous les ℓ tels que $mes(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma) > 0$.

Puisque $v_\ell = v_m$ sur $\gamma^{\ell m}$ alors on déduit que v_ℓ est nul pour tout $1 \leq \ell \leq L$. Ceci contredit le fait que $\|v\|_{\mathcal{X}_1^1} = \lim_{n\to+\infty} \|v_n\|_{\mathcal{X}_1^1} = 1$, donc la propriété $a(u,u) \geq c\|u\|^2_{\mathcal{X}_1^1}$ est vérifiée.

c) Pour prouver l'inégalité (2.3.4), il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} a(u,u) &= |u|^2_{\mathcal{X}_1^1} = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} f\ u\ rdrdz \\ &\leq \|f\|_{L_1^2(\Omega)} \|u\|_{L_1^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_1^2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{X}_1^1} \end{aligned}$$

et utiliser b). ■

2.3.2 Problème discret

On considère la forme bilinéaire discrète définie par :

$$a_\delta(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_\delta.$$

D'après (2.2.8) on a

$$\begin{aligned} a_\delta(u,v) &= \sum_{\ell=1}^{L_0}\sum_{i=1}^{N_\ell+1}\sum_{j=0}^{N_\ell}\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial v_\ell}{\partial r} + \frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\right)\left(\zeta_j^\ell, \xi_i^\ell\right)\omega_i^\ell\rho_j^\ell \\ &+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L}\sum_{i,j=0}^{N_\ell}\left(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial v_\ell}{\partial r} + \frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\right)(\xi_i^{(r)\ell}, \xi_j^\ell)\xi_i^{(r)\ell}\rho_i^\ell\rho_j^\ell. \end{aligned}$$

2.3.2.1 Choix de l'espace discret $X_\delta^\diamond$

On note $\mathcal{S}$ l'union des côtés des sous-domaines Ω_ℓ qui sont intérieurs à Ω, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \bigcup_{\ell=1}^{L} \partial\Omega_\ell \backslash \partial\Omega$. On choisit un sous-ensemble de côtés des sous-domaines Ω_ℓ

qui recouvre $\mathcal{S}$. Soit $(\gamma_\mu^+)_{1\leq\mu\leq M^+}$, tels que :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\mu=1}^{M^+}\gamma_\mu^+, \quad \gamma_\mu^+ \cap \gamma_{\mu'}^+ = \varnothing \text{ pour } \mu \neq \mu', \tag{2.3.7}$$

et tels que pour tous entiers $1 \leq \mu \leq M^+$, il existe deux entiers $\ell(\mu)$ et $j(\mu)$ avec

$$\gamma_\mu^+ = \Gamma^{\ell(\mu),j(\mu)}, \qquad 1 \leq \ell(\mu) \leq L,\, 1 \leq j(\mu) \leq 4.$$

Pour $v \in L_1^2(\Omega)$, on construit une fonction ϕ, qu'on appellera fonction joint associée à v sur $\mathcal{S}$, par :

$$\phi_{|\gamma_\mu^+} = v_{|\Gamma^{\ell(\mu),j(\mu)}}.$$

On définit l'espace discret X_δ comme suit :

$$X_\delta(\Omega) = \{v_\delta \in L_1^2(\Omega) \text{ tels que } v_{\delta|\Omega_\ell} = v_\ell \in \mathbb{P}_{N_\ell}(\Omega_\ell), \tag{2.3.8}$$

$$v_{\ell|\Gamma^{\ell,j}} = \phi_{|\gamma_\mu^+} \text{ si } (\ell,j) = (\ell(\mu), j(\mu)),$$
$$\int_{\Gamma^{\ell,j}} (v_\ell - \phi)(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0,\ \forall\psi \in \mathbb{P}_{N_\ell-2}\left(\Gamma^{\ell,j}\right), 1 \leq j \leq 4 \text{ et } 1 \leq \ell \leq L \text{ si}$$
$$(\ell,j) \neq (\ell(\mu), j(\mu))\}$$

La mesure $d\tau$ intervenant ci-dessus correspond à :

a) la mesure dz sur les côtés parallèles à l'axe (Oz),

b) la mesure $r\ dr$ sur les côtés strictement parallèles à l'axe (Or),

Finalement on définit l'espace $X_\delta^\diamond$:

$$X_\delta^\diamond(\Omega) = \{v_\delta \in X_\delta(\Omega);\ v_\delta = 0 \ sur\ \Gamma\} \tag{2.3.9}$$

Remarque 2.3.1 *On désigne les non joints par γ_m^-, (c'est à dire les côtés des Ω_ℓ qui ne coïncident pas avec un γ_μ^+) et on a $\mathcal{S} = \bigcup_{m=1}^{M^-}\gamma_m^-$, $\gamma_m^- \cap \gamma_{m'}^- = \varnothing$ pour $m \neq m'$, et*

$$\int_{\gamma_m^-} \left(v_{\gamma_m^-} - \phi\right)(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \forall\psi \in \mathbb{P}_{N_{(\gamma_m^-)}-2}\left(\gamma_m^-\right). \tag{2.3.10}$$

(où $N_{(\gamma_m^-)} = N_\ell$, γ_m^- côté de Ω_ℓ).

On munit $X_\delta^\diamond$ de la norme induite $\|.\|_{\mathcal{X}_1^1(\Omega)}$ donnée par :

$$\|v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.3.2 *L'espace discret $X_\delta^\diamond$ n'est pas inclu dans $\mathcal{H}^1_{1\diamond}(\Omega)$, l'approximation est dite non conforme. Cette non conformité est due à la continuité sur les interfaces qui est imposée uniquement dans un sens faible et dite condition des joints.*

2.3.2.2 Formulation variationnelle

On définit les opérateurs suivants [8, Chapitre VI] :

$\mathcal{I}_N^+$ l'opérateur d'interpolation de $L_1^2(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_N(\Omega_\ell)$, qui vérifie $f(\zeta_j^\ell, \xi_i^\ell) = \mathcal{I}_N^+ f(\zeta_j^\ell, \xi_i^\ell)$, pour f continue sur $\bar{\Omega}_\ell$,

$\mathcal{I}_N$ l'opérateur d'interpolation de $L^2(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_N(\Omega_\ell)$, qui vérifie $f(\xi_j^{(r)\ell}, \xi_i^\ell) = \mathcal{I}_N f(\xi_j^{(r)\ell}, \xi_i^\ell)$, pour f continue sur $\bar{\Omega}_\ell$, où ζ_j^ℓ, ξ_i^ℓ sont les zéros définis dans (2.2.7).

On considère le problème discret

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_\delta \in X_\delta^\diamond \text{ vérifiant :} \\ \forall v_\delta \in X_\delta^\diamond,\ a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right) = \left(\mathcal{I}_\delta f, v_\delta\right)_\delta . \end{array}\right. \tag{2.3.11}$$

où $\mathcal{I}_{\delta|\Omega_\ell} = \mathcal{I}_{N_\ell}^+$, si Ω_ℓ touche l'axe $r = 0$ et $\mathcal{I}_{\delta|\Omega_\ell} = \mathcal{I}_{N_\ell}$ sinon.

On va maintenant étudier l'existence et l'unicité de solution pour le problème (2.3.11). Pour ceci, on a besoin des deux propositions suivantes.

Proposition 2.3.2 *La formule bilinéaire a_δ est continue et coercive sur $X_\delta^\diamond$ muni de sa semi-norme c'est à dire, il existe deux constantes c et c' qui ne dépendent que de Ω telles que :*

$$\left\{\begin{array}{l} \forall u_\delta \in X_\delta^\diamond(\Omega), \forall v_\delta \in X_\delta^\diamond(\Omega), \\ |a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right)| \leq c|u_\delta|_{\mathcal{X}_1^1}|v_\delta|_{\mathcal{X}_1^1} \\ a_\delta\left(u_\delta, u_\delta\right) \geq c'|u_\delta|^2_{\mathcal{X}_1^1}. \end{array}\right. \tag{2.3.12}$$

Preuve 1) Continuité : On a, pour $(u_\delta, v_\delta) \in X_\delta^\diamond(\Omega) \times X_\delta^\diamond(\Omega)$:

$$a_\delta(u_\delta, v_\delta) = \sum_{\ell=1}^{L_0} \sum_{i=1}^{N_\ell+1} \sum_{j=0}^{N_\ell} \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial v_\ell}{\partial r} + \frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\right)\left(\zeta_j^\ell, \xi_i^\ell\right)\omega_i^\ell \rho_j^\ell + \sum_{\ell=L_0+1}^{L} \sum_{i,j=0}^{N_\ell} \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial v_\ell}{\partial r} + \frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\right)(\xi_i^{(r)\ell}, \xi_j^\ell)\xi_i^{(r)\ell}\rho_i^\ell \rho_j^\ell.$$

Le terme $\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial u_\ell}{\partial r}$ est de degré $2N_\ell - 2$ par rapport à r et le terme $\frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}$ est de degré $2N_\ell - 2$ par rapport à z. On peut donc utiliser (2.2.1) et (2.2.3) pour obtenir :

$$\begin{aligned} a_\delta(u_\delta, v_\delta) &= \sum_{\ell=1}^{L_0} \int_0^{r_\ell} \sum_{j=0}^{N_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial v_\ell}{\partial r}\left(r, \xi_i^\ell\right)\rho_j^\ell r\,dr \\ &+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L} \int_{r_\ell}^{r'_\ell} \sum_{j=0}^{N_\ell} \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\frac{\partial v_\ell}{\partial r}\right)(r, \xi_j^\ell)\rho_i^\ell r\,dr \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L_0} \sum_{i=1}^{N_\ell+1} \int_{z_\ell}^{z'_\ell} \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\right)\left(\zeta_j^\ell, z\right)\omega_i^\ell dz \\ &+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L} \sum_{i=0}^{N_\ell} \int_{z_\ell}^{z'_\ell} \left(\frac{\partial u_\ell}{\partial z}\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\right)(\xi_i^{(r)\ell}, z)\xi_i^{(r)\ell}\rho_i^\ell dz. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned} |a_\delta(u_\delta, v_\delta)| &\leq \sum_{\ell=1}^{L_0} \int_0^{r_\ell} \Big[\sum_{j=0}^{N_\ell}\Big(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\left(r, \xi_i^\ell\right)\Big)^2 \rho_j^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\sum_{j=0}^{N_\ell}\Big(\frac{\partial v_\ell}{\partial r}\left(r, \xi_i^\ell\right)\Big)^2 \rho_j^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} r\,dr \\ &+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L} \int_{r_\ell}^{r'_\ell} \Big[\sum_{j=0}^{N_\ell}\Big(\frac{\partial u_\ell}{\partial r}\left(r, \xi_i^\ell\right)\Big)^2 \rho_j^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\sum_{j=0}^{N_\ell}\Big(\frac{\partial v_\ell}{\partial r}\left(r, \xi_i^\ell\right)\Big)^2 \rho_j^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} r\,dr \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L_0} \int_{z_\ell}^{z'_\ell} \Big[\sum_{i=1}^{N_\ell+1}\Big(\frac{\partial u_\ell}{\partial z}\left(\zeta_j^\ell, z\right)\Big)^2 \omega_i^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\sum_{i=1}^{N_\ell+1}\Big(\frac{\partial v_\ell}{\partial z}\left(\zeta_j^\ell, z\right)\Big)^2 \omega_i^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} dz \\ &+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L} \int_{z_\ell}^{z'_\ell} \Big[\sum_{i=0}^{N_\ell}\Big(\frac{\partial u_\ell}{\partial z}(\xi_i^{(r)\ell}, z)\xi_i^{(r)\ell}\Big)^2 \rho_i^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[\sum_{i=0}^{N_\ell}\Big(\frac{\partial v_\ell}{\partial z}(\xi_i^{(r)\ell}, z)\xi_i^{(r)\ell}\Big)^2 \rho_i^\ell\Big]^{\frac{1}{2}} dz. \end{aligned}$$

On utilise ensuite (2.2.2) et (2.2.4) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right) \leq\ & 3\{\sum_{\ell=1}^{L_0}\int_0^{r_\ell}||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}(r,.))||_{L^2(z_\ell,z'_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial r}(r,.))||_{L^2(z_\ell,z'_\ell)}rdr \\
& +\sum_{\ell=L_0+1}^{L}\int_{r_\ell}^{r'_\ell}||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}(r,.))||_{L^2(z_\ell,z'_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial r}(r,.))||_{L^2(z_\ell,z'_\ell)}rdr \\
& +\sum_{\ell=L_0+1}^{L}\int_{z_\ell}^{z'_\ell}\sum_{\ell=1}^{L_0}\int_{z_\ell}^{z'_\ell}||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}(.,z))||_{L^2_1(r_\ell,r'_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial z}(.,z))||_{L^2_1(r_\ell,r'_\ell)}dz\} \\
& +4\{\sum_{\ell=1}^{L_0}\int_{z_\ell}^{z'_\ell}||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}(.,z))||_{L^2_1(0,r_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial z}(.,z))||_{L^2_1(0,r_\ell)}dz\}.
\end{aligned}$$

On utilise une autre fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right) \leq\ & 3\{\sum_{\ell=1}^{L_0}(||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}||_{L^2_1(\Omega_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial r}||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
& +||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}||_{L^2_1(\Omega_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial z}||_{L^2_1(\Omega_\ell)})\} \\
& +4\{\sum_{\ell=L_0+1}^{L}(||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}||_{L^2_1(\Omega_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial r}||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
& +||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}||_{L^2_1(\Omega_\ell)}||\frac{\partial v_\ell}{\partial z}||_{L^2_1(\Omega_\ell)})\}.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

On en déduit que :

$$a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right) \leq 4(\sum_{\ell=1}^{L}|u_\ell|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}(\sum_{\ell=1}^{L}|u_\ell|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}},$$

et la première inégalité est prouvée.

2) Coercivité : On a pour $u_\delta \in X_\delta^\diamond$

$$\begin{aligned}
a_\delta\left(u_\delta, u_\delta\right)_\delta = & \sum_{\ell=1}^{L_0}\sum_{i=1}^{N_\ell+1}\sum_{j=0}^{N_\ell}(|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial r}|^2+|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial z}|^2)\left(\zeta_j^\ell,\xi_i^\ell\right)\omega_i^\ell\rho_j^\ell \\
+ & \sum_{\ell=L_0+1}^{L}\sum_{j=0}^{N_\ell}(|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial r}|^2+|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial z}|^2)\left(\zeta_j^\ell,\xi_i^\ell\right)(\xi_i^{(r)\ell},\xi_j^\ell)\xi_i^{(r)\ell}\rho_i^\ell\rho_j^\ell.
\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\partial u_\ell}{\partial z}$ et $\frac{\partial u_\ell}{\partial r}$ ont des degrés $\leq N_\ell - 1$ en z respectivement en r. On utilise (2.2.1) et (2.2.3) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
a_\delta\left(u_\delta, u_\delta\right) = & \sum_{\ell=1}^{L_0}\sum_{j=0}^{N_\ell}\int_0^{r_\ell}|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial r}|^2\left(r,\xi_i^\ell\right)\rho_j^\ell rdr + \sum_{\ell=1}^{L_0}\sum_{j=0}^{N_\ell}\int_{r_\ell}^{r'_\ell}|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial z}|^2\left(r,\xi_i^\ell\right)\rho_j^\ell rdr+ \\
& +\sum_{\ell=1}^{L_0}\sum_{j=0}^{N_\ell}\int_{z_\ell}^{z'_\ell}|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial r}|^2(\zeta_i^\ell,z)\omega_i^\ell dz + \sum_{\ell=L_0+1}^{L}\sum_{i=0}^{N_\ell}\int_{z_\ell}^{z'_\ell}|\tfrac{\partial u_\ell}{\partial z}|^2(\xi_i^{(r)\ell},z)\xi_i^{(r)\ell}\rho_i^\ell dz.
\end{aligned}$$

Les inégalités (2.2.2) et (2.2.4) permettent de déduire que :

$$a_\delta(u_\delta,u_\delta) \geq \sum_{\ell=1}^{L_0}(\int_0^{r_\ell} ||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}(r,.)||^2_{L^2(z_\ell,z'_\ell)} rdr + ||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}(.,z)||^2_{L^2_1(0,r_\ell)}dz) +$$
$$+\sum_{\ell=L_0+1}^{L}(\int_{r_\ell}^{r'_\ell} ||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}(r,.)||^2_{L^2(z_\ell,z'_\ell)} rdr + \int_{z_\ell}^{z'_\ell} ||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}(.,z)||^2_{L^2_1(r_\ell,r'_\ell)}dz).$$

On a alors

$$\begin{aligned} a_\delta(u_\delta,u_\delta) &\geq \sum_{\ell=1}^{L_0}(||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}||^2_{L^2_1(\Omega_\ell)} + ||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}||^2_{L^2_1(\Omega_\ell)}) \\ &\quad + \sum_{\ell=L_0+1}^{L}(||\frac{\partial u_\ell}{\partial r}||^2_{L^2_1(\Omega_\ell)} + ||\frac{\partial u_\ell}{\partial z}||^2_{L^2_1(\Omega_\ell)}) \\ &\geq |u_\delta|^2_{\mathcal{X}^1_1} \end{aligned}$$

et la preuve est términée. ■

On va montrer maintenant que $||v||_{L^2_1(\Omega)}$ est majoré par la norme $|v|_{\mathcal{X}^1_1}$ fois une constante indépendante de δ. Pour cela on introduit d'abord le nombre N_a comme étant le nombre maximal de coins de $\bar{\Omega}_\ell$ contenus dans γ_m^-, $1 \leq m \leq M^-$.

Pour tout $v \in v \in L^2_1(\Omega)$, $v_{|\Omega_\ell} \in V^1_1(\Omega_\ell)$, on associe ϕ la fonction de joint. On définit alors l'espace X par :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{v \in L^2_1(\Omega),\, v_{|\Omega_\ell} \in V^1_1(\Omega_\ell) \text{ tel que} \\ \forall\ 1 &\leq m \leq M^-, \forall \psi \in \mathbb{P}_{N_a}, \int_{\gamma_m^-}(v-\phi)\psi d\tau = 0, v = 0 \text{ sur } \Gamma\}. \end{aligned}$$

On note que l'espace $X(\Omega)$ n'est pas discret mais contient tout les $X^\diamond_\delta$ pour lesquels les N_ℓ sont $\geq N_a + 2$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.3.3 *Il existe une constante c positive ne dépendant que de Ω telle que l'on a pour tout $v \in X(\Omega)$ (défini dans* (2.3.9) :

$$||v||_{L^2_1(\Omega)} \leq c\,|v|_{\mathcal{X}^1_1}\,. \tag{2.3.14}$$

Preuve 1) Soit $v \in X(\Omega)$ tel que $|v|_{\mathcal{X}^1_1} = 0$, on déduit que v_ℓ est constante pour tous les ℓ en plus $v_\ell = 0$ dans Ω_ℓ tel que $mes\,(\partial\Omega_\ell \cap \Gamma) > 0$. Mais ici on ne peut pas conclure directement que $v_\ell = 0$ pour tout ℓ, parce qu'on a pas nécessairement $v_\ell = v_m$ sur $\gamma^{\ell m}$. On fixe m tel que $1 \le m \le M^-$ et $mes\left(\partial\Omega_m^- \cap \Gamma\right) > 0$, on a alors :

$$\int_{\gamma_m^-} \left(v_{\gamma_m^-} - \phi\right)(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau = 0, \forall \psi \in \mathbb{P}_{N_m^- - 2}\left(\gamma_m^-\right).$$

d'où

$$\sum_{j\in J} \int_{\gamma^{jm}} \left(v_{\gamma_m^-} - v_j\right) \psi(\tau)\, d\tau = 0, \forall \psi \in \mathbb{P}_{N_m^- - 2}\left(\gamma_m^-\right).$$

avec $\gamma^{jm} = \bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_m^-$ et $mes(\gamma^{jm} = \bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_m^-) > 0$. Puisque v_ℓ est constante pour tout ℓ, on déduit que

$$\sum_{j\in J} \left(v_{\gamma_m^-} - v_j\right) \int_{\gamma^{jm}} \psi(\tau)\, d\tau = 0.$$

On introduit les extrémités a_{j_0} et a_{j_0-1} de l'interface $\gamma^{j_0 m}$ et on considère le polynôme χ défini sur γ_m^- et de degré $N_m^- - 1$ tel que

$$\chi(a_0) = \chi(a_1) = \cdots = \chi(a_{j_0-1}) = 0 \text{ et } \chi(a_{j_0}) = \chi(a_{j_0+1}) = \cdots = \chi(a_S) = 1.$$

Voir fig 2.3.1. Puisque $S \le N_a$, alors on peut choisir $\psi_{j_0} = \chi'$. Un tel ψ_{j_0} existe et on

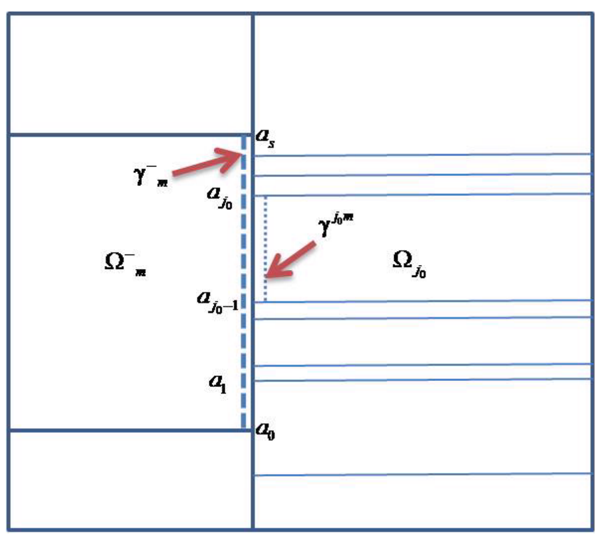

Fig. 2.3.1: Les points a_j

a

$$\int_{\gamma^{jm}} \psi_{j_0}(\tau)\, d\tau = \chi(a_j) - \chi(a_{j-1}) = \delta_{jj_0}$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. Par suite, on a

$$\sum_{j\in J}\left(v_{\gamma_m^-}-v_j\right)\int_{\gamma^{jm}}\psi_{j_0}(\tau)\,d\tau=\left(v_{\gamma_m^-}-v_{j_0}\right)=0,$$

et donc $v_{\gamma_m^-}=v_{j_0}$. On déduit que $v_\ell=0$ pour tout ℓ tel que Ω_ℓ est adjacent à un rectangle qui touche la frontière $\partial\Omega\backslash\Gamma_0$. Par extension, on peut montrer que tous les v_ℓ sont nuls.

2) On a montré dans 1) que $|v|_{\mathcal{X}_1^1}$ est une norme, on peut alors appliquer le lemme de peetre-tartar [35, Chapitre1. Th 2.1] avec $A=\nabla$ et $A\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$, $B=Id_{E_2=E_3}$, $E_1=H_1^1(\Omega)$ et $E_2=E_3=L_1^2(\Omega)$, pour déduire (2.3.14). ■

Remarque 2.3.3 *2) On suppose dorénavant que l'espace $X_\delta^\diamond(\Omega)$ vérifie la condition*

$$N_\ell\geq N_a+2,\forall 1\leq\ell\leq L.$$

On peut énoncer maintenant le théorème d'existence et d'unicité.

Théorème 2.3.1 *Si f est dans $L_1^2(\Omega)$, le problème*

$$\begin{cases}\text{Trouver } u_\delta\in X_\delta^\diamond \text{ vérifiant}:\\ \forall v_\delta\in X_\delta^\diamond,\ a_\delta(u_\delta,v_\delta)=(\mathcal{I}_\delta f,v_\delta)_\delta\,.\end{cases}\tag{2.3.15}$$

admet une unique solution. Cette solution vérifie :

$$||u_\delta||_{\mathcal{X}_1^1}\leq c||\mathcal{I}_\delta f||_{L_1^2(\Omega)}.\tag{2.3.16}$$

Preuve Pour prouver l'existence et l'unicité, on utilise le lemme de Lax Milgram et les deux propositions précédentes. Pour prouver l'inégalité (2.3.16), on écrit

$$a_\delta(u_\delta,u_\delta)=(\mathcal{I}_\delta f,u_\delta)_\delta\,,,$$

et on utilise (2.2.5) et (2.2.6) pour conclure que

$$C||u_\delta||^2_{\mathcal{X}_1^1}\leq a_\delta(u_\delta,u_\delta)\leq||f||_{L_1^2(\Omega)}||u_\delta||_{\mathcal{X}_1^1}.$$

■

2.3.3 Estimations d'erreurs

Proposition 2.3.4 *Soit u la solution du problème (2.3.3), et u_δ celle du problème (2.3.15). On a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned}
\|u-u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \quad \leq \quad & C(\inf_{v_\delta\in X_\delta^\diamond}\{\|u-v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \\
& + \sup_{w_\delta\in X_\delta^\diamond}\frac{a\left(v_\delta,w_\delta\right)-a_\delta\left(v_\delta,w_\delta\right)}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}}\} \\
& + \sup_{w_\delta\in X_\delta^\diamond}\frac{\sum\limits_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}} \\
& + \sup_{w_\delta\in X_\delta^\diamond}\frac{\int_\Omega f w_\delta r dr dz-\left(\mathcal{I}_\delta f,w_\delta\right)_\delta}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}}).
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Preuve L'ellipticité de a_δ donne l'existence d'un $\beta>0$ tel que l'on ait pour tout $v_\delta\in\mathcal{X}_{1\diamond}^1$:

$$\beta\left\|u_\delta-v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1}^2\leq a_\delta\left(u_\delta-v_\delta,u_\delta-v_\delta\right). \tag{2.3.18}$$

On pose $u_\delta-v_\delta=w_\delta$. On a en utilisant le fait que u_δ est solution du problème discret :

$$a_\delta\left(u_\delta-v_\delta,w_\delta\right)=-a_\delta\left(v_\delta,w_\delta\right)+(\mathcal{I}_\delta f,w_\delta)_\delta. \tag{2.3.19}$$

En plus on a, moyennant le fait que u est solution du problème continue et $w_\delta\in X^\diamond$

$$-\int_\Omega(\Delta u)w_\delta r dr dz-\int_\Omega f w_\delta r dr dz=0. \tag{2.3.20}$$

En rappellant que $\Delta u=\partial_r^2u+\frac{1}{r}\partial_r u+\partial_z^2 u$

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega(\Delta u)w_\delta r dr dz \quad = \quad & -\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau \\
& +\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}\nabla u\nabla w_\delta r dr dz,
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

où $[w_\delta]$ est le saut de w_δ à travers γ_μ^+. Utilisant (2.3.19) et (2.3.20), on obtient

$$a_\delta\left(u_\delta-v_\delta,w_\delta\right)=-a_\delta\left(v_\delta,w_\delta\right)+(\mathcal{I}_\delta f,w_\delta)_\delta-\int_\Omega(\Delta u)w_\delta r dr dz-\int_\Omega f w_\delta r dr dz. \tag{2.3.22}$$

En injectant (2.3.21) dans (2.3.22) on obtient

$$\begin{aligned} a_\delta\left(u_\delta - v_\delta, w_\delta\right) &= -a_\delta\left(v_\delta, w_\delta\right) + \sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell} \nabla u \nabla w_\delta r dr dz \\ &\quad - \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta] d\tau \\ &\quad + (\mathcal{I}_\delta f, w_\delta)_\delta - \int_\Omega f w_\delta r dr dz. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Or on a

$$\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell} \nabla u \nabla w_\delta r dr dz = \sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell} (\nabla u - \nabla v_\delta) \nabla w_\delta r dr dz + \sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell} \nabla v_\delta \nabla w_\delta r dr dz. \tag{2.3.24}$$

Moyennant (2.3.18) et (2.3.24), la formule (2.3.23) donne :

$$\begin{aligned} \|u_\delta - v_\delta\|^2_{\mathcal{X}_1^1} \leq\ & \frac{1}{\beta}\{\|u - v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} + \sup_{w_\delta \in \mathcal{X}_1^1}[\frac{a\left(v_\delta, w_\delta\right) - a_\delta\left(v_\delta, w_\delta\right)}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}}]\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \\ & + \sup_{w_\delta \in \mathcal{X}_{1\diamond}^1}[\frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta] d\tau}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}}]\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \\ & + \sup_{w_\delta \in \mathcal{X}_{1\diamond}^1}[\frac{(\mathcal{I}_\delta f, w_\delta)_\delta - \int_\Omega f w_\delta r dr dz}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}}]\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}\}, \end{aligned}$$

Enfin, on divise par $\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}$ et on utilise l'inégalité triangulaire

$$\|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq \|u - v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} + \|u_\delta - v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}$$

pour déduire le résultat. ∎

Remarque 2.3.4 *L'erreur entre la solution continue et celle discrète, est majorée par l'erreur d'approximation (c'est le premier terme dans (2.3.17) ajoutée à l'erreur de consistance (c'est le troisième terme dans (2.3.17), plus l'erreur due à l'intégration numérique (c'est le deuxieme et le quatrième terme).*

On va dans ce qui suit les majorer une à une.

2.3.3.1 Erreur d'approximation

Proposition 2.3.5 *Soit u la solution du problème (2.3.3), on suppose que $u_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)$ avec $s_\ell > \frac{1}{2}$ et $s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$. Alors on a*

$$\inf_{v_\delta \in X_\delta^\diamond} \|u - v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq c\lambda_\delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} ||u_\ell||_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}$$

où

$$\lambda_\delta = \max\{\frac{N_\mu^+}{N_m^-}, \frac{N_m^-}{N_\mu^+}\} \tag{2.3.25}$$

pour tout joints γ_μ^+, où μ est pris sur tous les $1 \leq \mu \leq M^+$ et non joints γ_m^-, avec $1 \leq m \leq M^-$ tels que $\gamma_\mu^+ \cap \gamma_m^-$ a une mesure positive.

Avant d'aborder la preuve on introduit les notations suivantes et on énonce les deux lemmes qui suivent dont la preuve peut être consultée dans [8, Chapitre II].

Notation : On note $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ l'ensemble des polynômes s'annulant en ± 1 et $\mathbb{P}_N^\diamond(\Lambda)$ l'ensemble des polynômes s'annulant en 1. On considère les opérateurs de projection orthogonale définis par :

$$\pi_N^{1,0} : H_0^1(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{P}_N^0(\Lambda), \text{ et } \pi_N^{+,1,\diamond} : H_{1\diamond}^1(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{P}_N^\diamond(\Lambda)$$

Lemme 2.3.1 *1) Il existe un opérateur $\tilde{\pi}_N^1 : H^1(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{P}_N(\Lambda)$, défini par :*

$$\tilde{\pi}_N^1 \tilde{\varphi}(\zeta) = \pi_N^{1,0}\varphi(\zeta) - \tilde{\varphi}(-1)\frac{1-\zeta}{2} - \tilde{\varphi}(1)\frac{1+\zeta}{2},$$

avec

$$\varphi(\zeta) = \tilde{\varphi}(\zeta) - \tilde{\varphi}(-1)\frac{1-\zeta}{2} - \tilde{\varphi}(1)\frac{1+\zeta}{2},$$

qui vérifie pour $0 \leq t \leq 1 \leq s$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (\tilde{\varphi} - \tilde{\pi}_N^1 \tilde{\varphi})\psi d\tau &= 0, \ \forall \psi \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda), \\ \left\|\tilde{\varphi} - \tilde{\pi}_N^1 \tilde{\varphi}\right\|_{H^t(\Lambda)} &\leq CN^{t-s} \left\|\tilde{\varphi}\right\|_{H^s(\Lambda)}. \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

2) Il existe un opérateur $\tilde{\pi}_N^{+,1} : H_1^1(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{P}_N(\Lambda)$ *défini par*

$$\tilde{\pi}_N^{+,1}\tilde{\phi}(\zeta) = \pi_N^{+,1,\diamond}\varphi^\diamond(\zeta) + \tilde{\phi}(1)\frac{1+\zeta}{2},$$

avec

$$\varphi^\diamond(\zeta) = \tilde{\phi}(\zeta) - \tilde{\phi}(1)\frac{1+\zeta}{2},$$

cet opérateur vérifie pour $0 \le t \le 1 \le s$ *:*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}(\tilde{\phi} - \tilde{\pi}_N^{+,1}\tilde{\phi})\psi d\tau &= 0, \forall \psi \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda), \qquad (2.3.27) \\ \left\|\tilde{\phi} - \tilde{\pi}_N^{+,1}\tilde{\phi}\right\|_{H_1^t(\Lambda)} &\le CN^{t-s}\left\|\tilde{\phi}\right\|_{H_1^s(\Lambda)}. \end{aligned}$$

En plus on a pour $s \ge 2$

$$\begin{aligned} \left\|\varphi - \tilde{\pi}_N^1 \circ \tilde{\pi}_N^1\varphi\right\|_{H^t(\Sigma)} &\le cN^{t-s}\left\|\varphi\right\|_{H^s(\Sigma)}, \forall \varphi \in H^s(\Sigma), \\ \left\|\varphi - \tilde{\pi}_N^{+,1} \circ \tilde{\pi}_N^{,1}\varphi\right\|_{H_1^t(\Sigma)} &\le cN^{t-s}\left\|\varphi\right\|_{H_1^s(\Sigma)}, \forall \varphi \in H_1^s(\Sigma). \qquad (2.3.28) \end{aligned}$$

Soit γ un côté de Σ. On rappelle la fonction trace de $H_1^1(\Sigma)$ dans $H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, et on munit $H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ de la norme

$$\left\|v\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma)} = \inf_{\substack{\varphi \in H_1^1(\Sigma) \\ \varphi_{|\gamma} = v}} \left\|\varphi\right\|_{H_1^1(\Sigma)}.$$

On note (ζ, ξ) les points générique dans Σ et $(1+\zeta)$ le poids. On énonce alors le lemme suivant.

Lemme 2.3.2 *Soit* γ *un côté de* Σ *alors on a :*

a) Pour tout entier $N \ge 2$*, il existe un opérateur* $\mathcal{R}^\gamma : \mathbb{P}_N^0(\gamma) \to \mathbb{P}_N(\Sigma)$ *tel que pour tout* $\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\gamma)$ *on a :*

$$\mathcal{R}^\gamma\varphi_N = \varphi_N \text{ sur } \gamma, \text{ et } \mathcal{R}^\gamma\varphi_N = 0 \text{ sur } \partial\Sigma\backslash\gamma,$$

De plus, il existe une constante c positive et indépendante de N *telle que :*

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\gamma), \left\|\mathcal{R}^\gamma\varphi_N\right\|_{H^1(\Sigma)} \le c\left\|\varphi_N\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)}.$$

b) Si γ n'est pas inclus dans l'axe $\{\zeta = -1\}$, pour tout $N \geq 2$, il existe un opérateur $\mathcal{R}_+^\gamma$ vérifiant :

(i) Si $\gamma \subset \{\zeta = 1\}$, $\mathcal{R}_+^\gamma$ opère de $\mathbb{P}_N^0(\gamma)$ dans $\mathbb{P}_N(\Sigma)$ et pour tout $\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\gamma)$, $\mathcal{R}_+^\gamma \varphi_N$ coincide avec φ_N sur γ et s'annule sur les trois autres côtés de Σ. De plus, il existe une constante c positive et indépendante de N telle que :

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\gamma), \|\mathcal{R}_+^\gamma \varphi_N\|_{H_1^1(\Sigma)} \leq c \|\varphi_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)}.$$

(ii) Si $\gamma \subset \{\zeta = \pm 1\}$, $\mathcal{R}_+^\gamma$ opère de $\mathbb{P}_N^\diamond(\gamma)$ dans $\mathbb{P}_N(\Sigma)$ et pour tout $\varphi_N \in \mathbb{P}_N^\diamond(\gamma)$, $\mathcal{R}_+^\gamma \varphi_N$ coincide avec φ_N sur γ et s'annule sur le côté opposé à γ et sur le côté inclus dans $\{\zeta = 1\}$. De plus, il existe une constante c positive et indépendante de N telle que :

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N^\diamond(\gamma), \|\mathcal{R}_+^\gamma \varphi_N\|_{H_1^1(\Sigma)} \leq c \|\varphi_N\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma)}.$$

c) Si γ n'est pas inclus dans l'axe $\{\zeta = -1\}$, pour tout $N \geq 2$, il existe un opérateur $\mathcal{R}_-^\gamma$ qui opère de $\mathbb{P}_N^0(\gamma)$ dans $\mathbb{P}_N(\Sigma)$ et pour tout $\varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\gamma)$, $\mathcal{R}_-^\gamma \varphi_N$ coincide avec φ_N sur γ et s'annule sur les trois autres côtés de Σ. De plus, il existe une constante c positive et indépendante de N telle que :

(i) Si $\gamma \subset \{\zeta = 1\}$,

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N^0(\gamma), \|\mathcal{R}_+^\gamma \varphi_N\|_{V_1^1(\Sigma)} \leq c \|\varphi_N\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma)}.$$

(ii) Si $\gamma \subset \{\zeta = \pm 1\}$

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N^\diamond(\gamma), \|\mathcal{R}_-^\gamma \varphi_N\|_{V_1^1(\Sigma)} \leq c \|\varphi_N\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma)}.$$

La preuve de ce lemme peut être consultée dans [16].

Lemme 2.3.3 *Soit a_p, $1 \leq p \leq P$, P points distincts dans Λ. Pour tout $N \geq P + 2$, et tout p, $1 \leq p \leq P$, il existe un polynome η_p dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ tel que η_p est égale à 1 en a_p et 0 en ± 1 et en $a_{p' \neq p}$. Ce polynôme η_p satisfait :*

$$\|\eta_p\|_{L_1^2(\Lambda)} \leq cN^{-\frac{1}{2}}, \quad \|\eta_p'\|_{L_1^2(\Lambda)} \leq cN^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.29}$$

La constante c dépend seulement des points a_p.

Preuve La preuve consiste à considérer le polynôme de Lagrange φ_i^- pour $0 \leq i \leq N - P - 1$, associé aux nœuds ζ_i^- de Gauss-Lobatto. On utilise [17, Lemma 2.3] combiné avec l'inégalité inverse on a :

$$\left\|\varphi_i^-\right\|^2_{L^2_1(\Lambda)} \leq cN^{-1}, \left\|(1-\zeta^2)\varphi_i^-\right\|_{L^2_1(\Lambda)} \leq cN^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \left|(1-\zeta^2)\varphi_i^-\right|_{H^1_1(\Lambda)} \leq cN^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.30}$$

Soit alors i l'indice tel que $\zeta_i^- \leq a_p < \zeta_{i+1}^-$. et on pose

$$\eta_p(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{1-a_p^2}\frac{\varphi_i^- + \varphi_{i+1}^-}{(\varphi_i^- + \varphi_{i+1}^-)(a_p)}\prod_{p'\neq p}\frac{\zeta - a_{p'}}{a_p - a_{p'}}. \tag{2.3.31}$$

η_p vérifie les propriétés désirées. ■

Revenons à la preuve de la proposition 2.3.5

Preuve La preuve se divise en trois étapes :

Etape 1 : Construction de v_δ^1

On pose

$$v_\ell^1 = \begin{cases} \mathcal{I}^+_{N_\ell} u & \text{sur } \Omega_\ell \text{ si } 1 \leq \ell \leq L_0 \\ \mathcal{I}_{N_\ell} u & \text{sur } \Omega_\ell \text{ si } L_0 + 1 \leq \ell \leq L \end{cases}$$

où $\mathcal{I}^+_{N_\ell} u(\zeta_i^\ell, \xi_j^\ell) = u(\zeta_i^\ell, \xi_j^\ell)$, $(1 \leq i \leq N+1$ et $0 \leq j \leq N)$, et $\mathcal{I}_{N_\ell} u(\xi_i^{(r)\ell}, \xi_j^\ell) = u(\xi_i^{(r)\ell}, \xi_j^\ell)$, $(0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N)$.

On a d'après [8, Chapitre VI.3], pour $s_\ell > \frac{1}{2}(s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0)$

$$\left\|u_{|\Omega_\ell} - v_\ell^1\right\|_{H^1_1(\Omega_\ell)} \leq CN_\ell^{-s_\ell} \left\|u_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{2.3.32}$$

et

$$\left\|u_{|\Omega_\ell} - v_\ell^1\right\|_{H^1_1(\Gamma)} + N_\ell\left\|u_{|\Omega_\ell} - v_\ell^1\right\|_{L^2_1(\Gamma)} \leq C'N_\ell^{\frac{1}{2}-s_\ell} \left\|u_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}, \ 1 \leq \ell \leq L. \tag{2.3.33}$$

Ici C et C'dépendent du maximum de $|r_{\ell+1} - r_\ell|$ si $L_0 + 1 \leq \ell \leq L$.

Cependant v_δ^1 ne vérifie pas la condition du joint sur les interfaces, on va pour cela relever les v_δ^1 ainsi construits sur les non joints. Ces termes relevés doivent s'annuler sur les coins de la partie non jointe. Pour cette raison une étape intermédiaire sera nécessaire.

Etape 2 : Construction de v_δ^2 :

Soit γ_μ^+, $1 \le \mu \le M^+$ les joints et $\mathcal{C}_\mu^+$ l'ensemble de tout les coins qui se trouvent sur γ_μ^+. On pose

$$v_\delta^2 = \sum_{\mu=1}^{M^+} \sum_{e \in \mathcal{C}_\mu^+} (u - v^1_{\delta|\Omega_\mu^+})(e) \tilde{\Phi}_{\mu,e}$$

où

$$\tilde{\Phi}_{\mu,e} = \begin{cases} \Phi_{\mu,e} & \text{dans } \Omega_\mu^+ \\ 0 & \text{dans } \Omega \backslash \bar{\Omega}_\mu^+ \end{cases} \tag{2.3.34}$$

$\Phi_{\mu,e}$ est obtenu de Φ par homothétie et translation, où $\Phi(\zeta, \eta) = \eta_p(\zeta)(\frac{1-\eta}{2})^{N_\mu^+}$.

On a alors $v_\delta^1 + v_\delta^2$ est égal à u sur tous les nœuds de $\mathcal{C}_\mu^+$ et

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\| v_\delta^2 \right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} = c \sum_{\mu=1}^{M^+} \sum_{e \in \mathcal{C}_\mu} |(u - v^1_{\delta|\Omega_\mu^+})(e)|,$$

avec c indépendant de N. En effet en combinant (2.3.29) et le fait que $\left\| (\frac{1-\eta}{2})^N \right\|_{H_1^s(\Omega)} \le cN^{s-\frac{1}{2}}$, on conclût que $\|\Phi_{\mu,e}\|_{H_1^1(\Omega_\mu^+)}$ est majoré indépendamment de N_μ^+.

En applicant l'inégalité de $Galiardo - Niremberg$ sur chaque γ_μ^+ on a :

$$\begin{aligned} \left\| u - v^1_{\delta|\Omega_\mu^+} \right\|_{L^\infty(\gamma_\mu^+)} &\le \left\| u - v^1_{\delta|\Omega_\mu^+} \right\|^{\frac{1}{2}}_{L_1^2(\gamma_\mu^+)} \left\| u - v^1_{\delta|\Omega_\mu^+} \right\|^{\frac{1}{2}}_{H_1^1(\gamma_\mu^+)} \\ &\le c(N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \|u\|_{H_1^{s_\mu^+ + 1}(\Omega_\mu^+)} \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

D'où on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\| v_\delta^2 \right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} = c \sum_{\mu=1}^{M^+} (N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \|u\|_{H_1^{s_\mu^+ + 1}(\Omega_\mu^+)} .$$

De même on a en utilisant le lemme 2.3.3, et (2.3.35) :

$$\begin{aligned} \left\| v_\delta^2 \right\|_{H_1^1(\gamma_\mu^+)} &\le c(N_\mu^+)^{\frac{1}{2} - s_\mu^+} \|u\|_{H_1^{s_\mu^+ + 1}(\Omega_\mu^+)} . \\ \left\| v_\delta^2 \right\|_{L_1^2(\gamma_m^-)} &\le c(N_\mu^+)^{-\frac{1}{2} - s_\mu^+} \|u\|_{H_1^{s_\mu^+ + 1}(\Omega_\mu^+)} . \end{aligned}$$

Etape 3 : Construction de v_δ^3

On désigne respectivement par $\tilde{\pi}_{N_\ell}^{+,1,(r),\ell}$, $1 \leq \ell \leq L_0$, $\tilde{\pi}_{N_\ell}^{1,(r),\ell}$, $L_0 + 1 \leq \ell \leq L$ et $\tilde{\pi}_{N_\ell}^{1,(z),\ell}$, $1 \leq \ell \leq L$, les opérateurs de projection correspondants respectivement à $\tilde{\pi}_N^{+1}$ dans la direction r, $\tilde{\pi}_N^1$ dans la direction z. L'indice ℓ est relatif au sous-domaine Ω_ℓ, $1 \leq \ell \leq L$.

On pose $v_\delta^{12} = v_\delta^1 + v_\delta^2$. D'après la première partie, on a $v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}$ s'annule sur toutes les extremités de γ_m^-, $1 \leq m \leq M^-$. On définit maintenant l'opérateur $\tilde{\pi}^{\gamma_m^-}$ par :

$$\tilde{\pi}^{\gamma_m^-} = \begin{cases} \tilde{\pi}_m^{+,1,(r)} & \text{si } \gamma_m^- \ // \ \text{(Or) et touche l'axe } \{r = 0\} \\ \tilde{\pi}_m^{1,(r)} & \text{si } \gamma_m^- \ // \ \text{(Or) et loin de l'axe } \{r = 0\} \\ \tilde{\pi}_m^{1,(z)} & \text{si } \gamma_m^- \ // \ \text{(Oz).} \end{cases}$$

On définit v_δ^3 par :

$$v_\delta^3 = \sum_{m=1}^{M^-} [\tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-} (v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}] \tag{2.3.36}$$

où γ_m^+ est le côté γ_m^- vu dans l'autre direction voir fig 2.3.2

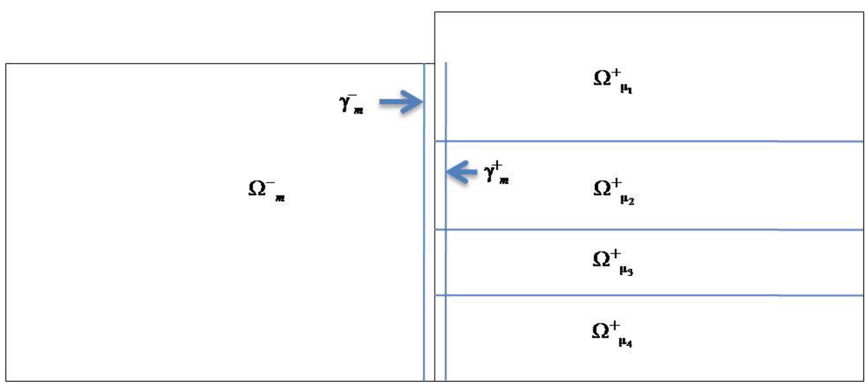

Fig. 2.3.2: Décomposition du domaine

1) $\tilde{\mathcal{R}}_-^{\gamma_m^-}$ resp $\tilde{\mathcal{R}}^{\gamma_m^-}$ sont les relèvements déduis de $\mathcal{R}_-^{\gamma_m^-}$ resp $\mathcal{R}^{\gamma_m^-}$, par homothétie et translation. On note alors

$$\tilde{\mathcal{R}}_\star^\gamma = \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}_-^\gamma \text{ si } \gamma \ // \ \text{(Or) et touche l'axe } \{r = 0\} \\ \tilde{\mathcal{R}}^\gamma \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.3.37}$$

2) On utilise pour tout s réel, la notation :

$$(H^{s,\gamma}, V^{s,\gamma}, L^{2,\gamma}) = \begin{cases} (H_1^s, V_1^s, L_1^2) \text{ si } \gamma \ // \ (Or) \text{ et touche l'axe } \{r=0\} \\ (H^s, V^s, L^2) \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-}(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}) &= \tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-}(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}) \\ &\quad - \tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-}(Id - \tilde{\pi}^{\gamma_m^-})(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}). \end{aligned}$$

On utilise le fait que $\left\|\varphi - \tilde{\pi}^{\gamma_m^-}\varphi\right\|_{V^{r,\gamma_m^-}(\Omega_m^-)} \leq c(N_m^-)^{r-s} \|\varphi\|_{H^{s,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)}$, pour $0 \leq r \leq 1 \leq s$. Ici on prend $r = \frac{1}{2}$ et $s = 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-}(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\Omega_m^-)} &\leq c\left\|(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \\ &\quad + \left\|(Id - \tilde{\pi}^{\gamma_m^-})(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{H^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)}. \end{aligned}$$

On utilise (2.3.26) et (2.3.27) pour déduire que

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-}(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\Omega_m^-)} &\leq c\left\|(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \\ &\quad + N_m^{-\frac{1}{2}}\left\|(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)}. \end{aligned}$$

Puisque les termes $u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^+}$ et $u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}$ s'annulent sur les extrémités de γ_m^-, alors ils appartiennent à $V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)$. On a en plus $v^2_{\delta|\gamma_m^-}$ s'annule sur γ_m^- on a alors

$$\left\|(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \leq \left\|u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} + \left\|u - v^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)}$$

et

$$\left\|v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \leq \left\|u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} + \left\|u - v^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)}.$$

D'après l'inégalité d'interpolation on a

$$\begin{aligned} \left\|u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} &\leq \left\|u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^{2,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \left\|u - v^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|^{\frac{1}{2}}_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \\ \left\|u - v^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{H^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} &\leq \left\|u - v^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L^{2,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} \left\|u - v^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|^{\frac{1}{2}}_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)}. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{K}_m^-$ l'ensemble des indices , $1 \leq \mu \leq M^+$, tel que $\gamma_m^- \cap \gamma_\mu^+$ a une mesure non nulle. On écrit alors

$$\gamma_m^- = \sum_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} \gamma_m^- \cap \gamma_\mu^+.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left\| (v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}) \right\|_{V^{\frac{1}{2},\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} &\leq c(N_m^-)^{-s_m^-} \|u\|_{H^{s_m^-+1,\gamma_m^-}(\Omega_m^-)} \\ &+ c_{\gamma_m^-} \sum_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \|u\|_{H^{s_\mu^++1,\gamma_\mu^+}(\Omega_\mu^+)} \end{aligned}$$

où

$$c_{\gamma_m^-} = \max_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{4}} / \min_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{4}}$$

et

$$\begin{aligned} (N_m^-)^{-\frac{1}{2}} \left\| (v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}) \right\|_{H^{1,\gamma_m^-}(\gamma_m^-)} &\leq c[(N_m^-)^{-s_m^-} \|u\|_{H^{s_m^-+1,\gamma_m^-}(\Omega_m^-)} \\ &+ (N_m^-)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}-s_\mu^+} \|u\|_{H^{s_\mu^++1,\gamma_\mu^+}(\Omega_\mu^+)}]. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (N_m^-)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}-s_\mu^+} \|u\|_{H^{s_\mu^++1,\gamma_\mu^+}(\Omega_\mu^+)} &\leq (N_m^-)^{-\frac{1}{2}} \max_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}}. \\ &\sum_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \|u\|_{H^{s_\mu^++1,\gamma_\mu^+}(\Omega_\mu^+)}. \end{aligned}$$

On pose

$$\lambda_\delta = \max\{\frac{N_\mu^+}{N_m^-}, \frac{N_m^-}{N_\mu^+}\}.$$

On a les termes $(N_m^-)^{-\frac{1}{2}} \max_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}}$ et $c_{\gamma_m^-}$ sont majorés par $\lambda_\delta^{\frac{1}{2}}$. En effet on a

$$c_{\gamma_m^-} \leq \frac{\max_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}}}{2(N_m^-)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(N_\mu^+)^{\frac{1}{2}}}{\min_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}}}$$

D'où on obtient que

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\delta^3\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} = c\lambda_\delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \|u\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}.$$

On conclut finalement que $v_\delta = v_\delta^1 + v_\delta^2 + v_\delta^3$ satisfait la condition des joints et appartient bien à l'espace $X_\delta^\diamond$. ∎

Remarque 2.3.5 *1) On peut remplacer le terme global λ_δ par un terme local λ_ℓ :*

$$\lambda_\ell = \max_m \max_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} \{\frac{N_\mu^+}{N_m^-}, \frac{N_m^-}{N_\mu^+}\}, \tag{2.3.38}$$

où le premier max est pris sur les m des non joints γ_m^- qui est un côté de Ω_ℓ. Et on a :

$$\inf_{v_\delta \in X_\delta^\diamond} \sum_{\ell=1}^{L} \|u - v_\delta\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} (1+\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}} N_\ell^{-s_\ell} \|u\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}.$$

Corollaire 2.3.1 *Soit u la solution du problème (2.3.3), on suppose que $u_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)$ avec $s_\ell > \frac{1}{2}$ et $s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$. On suppose de plus que la géométrie est conforme alors on a*

$$\inf_{v_\delta \in X_\delta^\diamond} \sum_{\ell=1}^{L} \|u - v_\delta\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \|u\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{2.3.39}$$

Preuve Dans une géométrie conforme, on remarque qu'on peut éliminer le terme λ_δ, effet on procède comme dans l'étape 1 de la preuve de la proposition 2.3.5 en choisissant v_δ^1. Ensuite, puisque pour tout m, $1 \leq m \leq M_m^-$, γ_m^- est un côté commun à Ω_ℓ et $\Omega_{\ell'}$, on choisit alors $\Omega_m^- = \Omega_\ell$ et $\Omega_m^+ = \Omega_{\ell'}$ si $N_\ell \geq N_{\ell'}$ et $\Omega_m^- = \Omega_{\ell'}$ et $\Omega_m^+ = \Omega_{\ell'}$ sinon. On pose maintenant

$$v_\delta^2 = \sum_{m=1}^{M^-} \tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-}(v^1_{\delta|\gamma_m^+} - v^1_{\delta|\gamma_m^-}),$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-}(v^1_{\delta|\gamma_m^+} - v^1_{\delta|\gamma_m^-}) \right\|_{H_1^1(\Omega_m^-)} &\leq c(\left\| u - v^1_{\delta|\Omega_m^-}) \right\|_{V_1^{\frac{1}{2}}(\Omega_m^-)} + \left\| u - v^1_{\delta|\Omega_m^+}) \right\|_{V_1^{\frac{1}{2}}(\Omega_m^+)}) \\ &\leq c(N^{-s_m^-} \|u\|_{H_1^{s_m^-+1}(\Omega_m^-)} + N^{-s_m^+} \|u\|_{H_1^{s_m^++1}(\Omega_m^+)}). \end{aligned}$$

D'où en sommant sur m, et en posant $v_\delta = v_\delta^1 + v_\delta^2$, on obtient l'inégalité (2.3.39). ∎

2.3.3.2 Erreur d'interface

Proposition 2.3.6 *Soit u la solution du problème (2.3.3). On suppose que $u_{|\Omega_\ell} \in H^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)$, $s_\ell > \frac{1}{2}$ ($s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$). Alors on a pour tout $w_\delta \in X_\delta^\diamond$*

$$|\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta] d\tau| \leq C[\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{p_\ell} \|u\|_{H^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}] \|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}.$$

où p_ℓ est égal à 1 si l'un des côtés de Ω_ℓ est un γ_m^- et intercecte au moins deux sous-domaine $\bar{\Omega}_{\ell'}, \ell' \neq \ell$ et 0 sinon.

Preuve On considère ici deux cas :

Le premier traite le cas où la décomposition est conforme. Ensuite le deuxième traite le cas où la décomposition est non conforme.

a) **Cas où γ_m^- est un côté entier commun à Ω_ℓ et Ω_t** voir fig 2.3.3

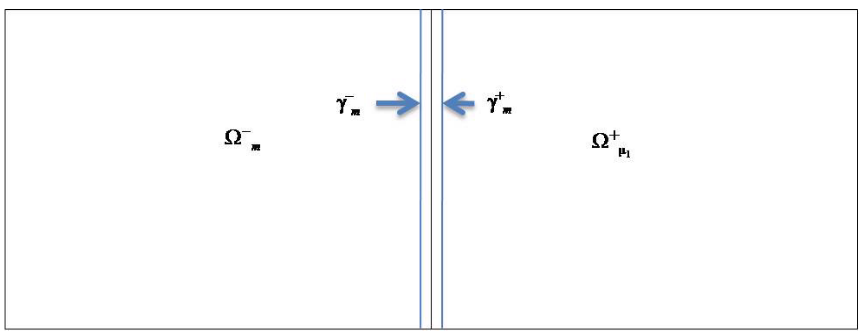

Fig. 2.3.3: Décomposition du domaine : cas conforme

On suppose que Γ^ℓ est le joint et ϕ la fonction joint correspondante (le cas où Γ^test pris pour joint se traite de la même manière), on a alors

$$\int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta] d\tau = \int_{\Gamma^t} \frac{\partial u}{\partial n} \left(\phi - w_{\delta|\Omega_t}\right)(\tau)\, d\tau.$$

On a par définition de $X_\delta^\diamond$

$$\forall \psi \in \mathbb{P}_{N_t-2}\left(\Gamma^t\right), \int_{\Gamma^t} \left(\phi - w_{\delta|\Omega_t}\right) \psi\left(\tau\right) d\tau = 0,$$

et par conséquent on a

$$\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau = \int_{\Gamma^t}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right)\left(\phi - w_{\delta|\Omega_t}\right)(\tau)\,d\tau. \tag{2.3.40}$$

-Pour t et $\ell > L_0$, on remarque que la fonction joint $\phi_{|\Gamma^t}$ est dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)$. On déduit de (2.3.40) que

$$|\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau| \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial n}-\psi\right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}\left\|\phi - w_{\delta|\Omega_t}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}.$$

Soit π_{N_t} la projection orthogonale de $L^2(\Gamma^t)$ sur $\mathbb{P}_{N_t}(\Gamma^t)$. On prend pour $\psi = \pi_{N_t-2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}|\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau| &\leq cN_t^{-\frac{1}{2}-(s_t-\frac{1}{2})}||\frac{\partial u}{\partial n}||_{H^{s_t-\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}\\ &\quad(\left\|w_{\delta|\Omega_t}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)}+\|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)}).\end{aligned}$$

Sachant que l'opérateur trace est continu de $H^1(\Omega_t)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)$ et que l'opérateur trace normale l'est de $H^{s_t+1}(\Omega_t)$ dans $H^{s_t-\frac{1}{2}}(\Gamma^t)$, on peut déduire que :

$$\begin{aligned}|\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau| &\leq cN_t^{-s_t}\|u\|_{H^{s_t+1}(\Omega_t)}\\ &\quad(\left\|w_{\delta|\Omega_t}\right\|_{H^1(\Omega_t)}+\left\|w_{\delta|\Omega_\ell}\right\|_{H^1(\Omega_\ell)}).\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

- Pour t et $\ell \leq L_0$, la fonction $\phi_{|\Gamma^t}$ est dans $H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)$.

Soit $\pi_{N_t}^+$ la projection orthogonale de $L_1^2(\Gamma^t)$ sur $\mathbb{P}_{N_t}(\Gamma^t)$. On prend pour $\psi^+ = \pi_{N_t-2}^+\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$, on a alors

$$\begin{aligned}|\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial u}{\partial n_m})[w_\delta]d\tau| &\leq \left\|\frac{\partial u}{\partial n}-\psi^+\right\|_{H_1^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}\left\|\phi - w_{\delta|\Omega_t}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}\\ &\leq cN_t^{1-s_t}\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{H_1^{s_t-\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}\\ &\quad(\left\|w_{\delta|\Omega_t}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)}+\|\phi\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)})\\ &\leq cN_t^{-s_t}\|u\|_{H_1^{s_t+1}(\Omega_t)}\\ &\quad(\left\|w_{\delta|\Omega_t}\right\|_{H_1^1(\Omega_t)}+\left\|w_{\delta|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)}).\end{aligned}$$

b) Cas où $\gamma_m^- \subset \cup_{1\leq i\leq I}\,\Omega_{t_i}$, I étant un nombre entier positif voir fig 2.3.2.

Dans ce cas on a $w_{\delta|\Omega_{t_i}} \in H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)$ pour tout $\varepsilon > 0$ si Ω_{t_i} touche l'axe $\{r = 0\}$, sinon $w_{\delta|\Omega_{t_i}} \in H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)$. En effet $w_{\delta|\Omega_{t_i}} \in H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^- \cap \partial\Omega_{t_i})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Or D'après $[26, Rem2.10]$ on a pour tout $\varepsilon > 0$ le prolongement par zéro est continu de $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)$ où γ est une partie de γ_m^- avec

$$\|.\|_{H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)} \leq c\varepsilon^{-1}\,\|.\|_{H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma)}\,. \tag{2.3.42}$$

Ce résultat reste valable pour la norme de $H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma)$.

Pour unifier les deux cas $\ell > L_0$ et $\ell \leq L_0$, on va utiliser le fait que la norme $\|.\|_{H^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)}$ et la norme $\|.\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)}$ sont équivalentes si γ_m^- est loin de l'axe $\{r = 0\}$, avec une constante qui dépend de la valeur absolue de la mesure de γ_m^-. De la même façon si Ω_{t_i} est loin de l'axe $\{r = 0\}$, on a la norme $\|.\|_{H^1(\Omega_{t_i})}$ et la norme $\|.\|_{H_1^1(\Omega_{t_i})}$ sont équivalentes. Dans le cas général on peut considérer que la constante dépend du diamètre de Ω. Puisque $[w_\delta] = w_{\delta|\gamma_m^-} - \Phi_{|\gamma_m^-}$ où $\Phi_{|\gamma_m^-} = \sum_{1\leq i\leq I} \tilde{w}^i_{\delta|\gamma_m^-}$ et $\tilde{w}^i_{\delta|\gamma_m^-}$ est le prolongement de $w^i_{\delta|\partial\Omega_{t_i}\cap\gamma_m^-}$ sur γ_m^-. On a alors

$$|\int_{\gamma_m^-} \frac{\partial u}{\partial n}\,[w_\delta]\,(\tau)\,d\tau| \leq C\left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\gamma_m^-)}\left(\left\|w_{\delta|\Omega_{\gamma_m^-}}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)} + \|\Phi\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)}\right) \tag{2.3.43}$$

En utilisant l'inégalité

$$\|\Phi\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)} \leq \sum_{1\leq i\leq I}\left\|w^i_{\delta|\Omega_{t_i}}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)},$$

et (2.3.42) on a :

$$\begin{aligned}
|\int_{\gamma_m^-} \frac{\partial u}{\partial n}\,[w_\delta]\,(\tau)\,d\tau| \;&\leq\; C\left\|\frac{\partial u}{\partial n} - \psi^+\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)} \\
&\quad \left(\left\|w_{\delta|\Omega_{\gamma_m^-}}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)} + c\varepsilon^{-1}\sum_{1\leq i\leq I}\left\|w^i_{\delta|\Omega_{t_i}}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_{t_i})}\right) \\
&\leq\; C(1+c\varepsilon^{-1})\left\|\frac{\partial u}{\partial n} - \psi^+\right\|_{H_1^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\gamma_m^-)} \\
&\quad \left(\left\|w_{\delta|\Omega_{\gamma_m^-}}\right\|_{H_1^1(\Omega_m)} + \sum_{1\leq i\leq I}\left\|w^i_{\delta|\Omega_{t_i}}\right\|_{H_1^1(\Omega_{t_i})}\right)
\end{aligned}$$

où $\psi^+ = \pi^+_{N_m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$. D'autre part on a en posant $\varepsilon = 1/\log N_m$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u}{\partial n} - \psi^+\right\|_{H_1^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\gamma_m^-)} &\leq cN_m^{(\varepsilon-\frac{1}{2})-(s_m-\frac{3}{2})}\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{H_1^{s_m-\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)}\\ &\leq ceN_m^{1-s_m}\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{H_1^{s_m-\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)}\\ &\leq ceN_m^{1-s_m}\|u\|_{H_1^{s_m}(\Omega_m)}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$|\int_{\gamma_m^-}\frac{\partial u}{\partial n}[w_\delta](\tau)\,d\tau| \leq C(1+c\varepsilon^{-1})N_m^{1-s_m}\|u\|_{H_1^{s_m}(\Omega_m)}\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}, \tag{2.3.44}$$

et

$$\frac{|\int_{\gamma_m^-}\frac{\partial u}{\partial n}[w_\delta](\tau)\,d\tau|}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}} \leq C'N_m^{-s_m}(\log N_m)\|u\|_{H_1^{s_m+1}(\Omega_m)}.$$

Finalement en sommant sur m on obtient le résultat. ■

Erreur d'intégration sur le second membre Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition suivante.

Théorème 2.3.2 *Soit f une fonction, telle que $f_{|\Omega_\ell} \in H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)$, $\sigma_\ell > 1$ ($\sigma_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$) . On suppose que u_δ est solution du problème (2.3.15) et u du problème (2.3.3), qui vérifie en plus $u_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)$, avec $s_\ell > \frac{1}{2}$ ($s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$). Alors on a*

$$\begin{aligned}\|u-u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq\ & c\sum_{\ell=1}^{L}[(1+\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}}N_\ell^{-s_\ell}(\log N_\ell)^{\varrho_\ell}\|u\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}\\ &+N_\ell^{-\sigma_\ell}\|f\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)}].\end{aligned}$$

où c est une constante positive et ϱ_ℓ est égal à 1 si l'un des côtés de Ω_ℓ est γ_m^- et intersecte au moins deux sous-domaines $\bar{\Omega}_{\ell'}, \ell' \neq \ell$ et 0 sinon.

Preuve Erreur d'intégration

a) On pose $\delta - 1 = (N_1-1, N_2-1, ..., N_L-1)$, on note $x_{\delta-1}$ l'élément qui vérifie $x_{\delta-1}|_{\Omega_\ell} = \Pi^{+,1}_{N_\ell-1}u$, $\Pi^{+,1}_{N_\ell-1}$ est l'opérateur de projection orthogonale de $H_1^1(\Omega_\ell)$ dans

$\mathbb{P}_{N_\ell-1}(\Omega_\ell)$. On a

$$\begin{aligned}
-a_\delta(v_\delta, w_\delta) + a(v_\delta, w_\delta) &= a(v_\delta - x_{\delta-1}, w_\delta) - a_\delta(v_\delta - x_{\delta-1}, w_\delta) \\
&\leq c\{\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\delta - x_{\delta-1}\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)}\}^{\frac{1}{2}} \|w_\delta\|_{\mathcal{X}^1_1} \\
&\leq c\{\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u - \Pi^{+,1}_{N_\ell-1} u\right\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)} \\
&\quad + \|u - v_\delta\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)}\}^{\frac{1}{2}} \|w_\delta\|_{\mathcal{X}^1_1}.
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on utilise [8, Proposition V.3.3] pour déduire que

$$\{\sum_{\ell=1}^{L} \left\|v_\delta - \Pi^{+,1}_{N_\ell-1} u\right\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)}\}^{\frac{1}{2}} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} ||u_\ell||_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}$$

et que

$$\frac{a(v_\delta, w_\delta) - a_\delta(v_\delta, w_\delta)}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}^1_1}} \leq c\{\|u - v_\delta\|_{\mathcal{X}^1_1} + \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} ||u_\ell||_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}\}. \tag{2.3.45}$$

b)

On utilise le fait que $c' \|.\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)} \leq \|.\|_{H^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)} \leq c \|.\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)}$ pour $L_0 + 1 \leq \ell \leq L$, (c et c' dépendent seulement de la géométrie de Ω) pour déduire que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f w_\delta r dr dz - (\mathcal{I}_\delta f, w_\delta)_\delta &= \int_\Omega (f - \Pi^+_{N_\ell-1} f) w_\delta r dr dz \\
&\quad - \left(\mathcal{I}_\delta f - \Pi^+_{N_\ell-1} f, w_\delta\right)_\delta \\
&\leq c \sum_{\ell=1}^{L} (||f - \Pi^+_{N_\ell-1} f||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
&\quad + ||\mathcal{I}_\delta f - \Pi^+_{N_\ell-1} f||_{L^2_1(\Omega_\ell)}) ||w_\delta||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
&\leq c \sum_{\ell=1}^{L} (||f - \Pi^+_{N_\ell-1} f||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
&\quad + ||f - \mathcal{I}_\delta f||_{L^2_1(\Omega_\ell)}) ||w_\delta||_{L^2_1(\Omega_\ell)}.
\end{aligned}$$

où $\Pi^+_{N_\ell-1}$ est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2_1(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_{N_\ell-1}(\Omega_\ell)$. On rappelle que $\mathcal{I}_{\delta|\Omega_\ell} = \mathcal{I}^+_{N_\ell}$, si Ω_ℓ touche l'axe (Or) et $\mathcal{I}_{\delta|\Omega_\ell} = \mathcal{I}_{N_\ell}$ sinon, on a alors d'après [8, (VI.3.1) et Proposition V.2.1 et VI.3.1] :

$$\begin{aligned}
&||f - \Pi^+_{N_\ell-1} f||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \leq c N_\ell^{-\boldsymbol{\sigma}_\ell} ||f||_{H_1^{\boldsymbol{\sigma}_\ell}(\Omega_\ell)}, \\
&||f - \mathcal{I}_\delta f||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \leq c N_\ell^{-\boldsymbol{\sigma}_\ell} ||f||_{H_1^{\boldsymbol{\sigma}_\ell}(\Omega_\ell)}.
\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

D'où

$$\left| \int_{\Omega} f w_\delta r dr dz - (\mathcal{I}_\delta f, w_\delta)_\delta \right| \leq C \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} ||f||_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)} \|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} . \tag{2.3.47}$$

avec C dépend du diamètre de Ω.

La preuve est obtenue en combinant (2.3.45), (2.3.47) et les propositions 2.3.3 et 2.3.6. ■

Remarque 2.3.6 *Dans l'inégalité (2.3.17), on peut considérer $v_\delta \in X_\delta^\diamond \cap \mathbb{P}_{\delta-1}$, alors le terme $a(v_\delta, w_\delta) - a_\delta(v_\delta, w_\delta) = 0$ et il reste à estimer $\inf\limits_{v_\delta \in X_\delta^\diamond \cap \mathbb{P}_{\delta-1}} \|u - v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}$.*

2.3.4 Estimations d'erreur : (cas des fonctions singulières)

Avant d'énoncer un théorème important sur les estimations d'erreur des singularités, on commence par donner un résultat qui a été démontré dans le cas conforme [16, Théorème 4.36]. On va ici étendre le résultat dans le cas non conforme.

Proposition 2.3.7 *Soit $S_{e_i}^{(0)}$ appartenant à $\pounds_e^{(0)\lambda,q}$ défini dans (1.6.26) et $q > 0$ fixé. Alors pour tout $Re(\lambda) > 0$, on a*

$$\inf_{z_\delta \in X_\delta^\diamond} ||S_{e_i}^{(0)} - z_\delta||_{\mathcal{X}_1^1} \leq c N_{e_i}^{-2\lambda} (\log N_{e_i})^{q+\frac{1}{2}} \tag{2.3.48}$$

où

$$N_{e_i} = \min\{N_\ell, \Omega_\ell \cap supp(S_{e_i}^{(0)}) \neq \varnothing, 1 \leq \ell \leq L\}. \tag{2.3.49}$$

Preuve On va supposer que le support de $S_{e_i}^{(0)}$ est assez petit, de sorte que sa valeur soit nulle sur les côtés ne contenant pas e_j. On divise le problème en trois étapes :

Etape 1 : Construction de u_δ^1

On approche $S_{e_i}^{(0)}$, sur chaque domaine Ω_ℓ par un polynôme qui s'annule sur les sommets e_i de Ω_ℓ extérieurs à l'axe $\{r = 0\}$.

On considère pour cela la fonction u^1_δ telle que $u^1_\ell = u^1_{\delta|\Omega_\ell}$ vérifie :

$$u^1_\ell(r,z) = \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}(r,z) - \sum_j \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}(e_j)\eta^j(r,z),$$

où η^j est un polynôme dans $\mathbb{P}_1(\Omega_\ell)$, qui est égal à 1 en e_i et 0 sur les autres côtés

dans Ω_ℓ qui ne contiennent pas e_i. Puisque e_i n'est pas sur l'axe $\{r = 0\}$. Evidemment, $u^1_\ell(r,z)$ s'annule sur tout les coins e en dehors de Ω_ℓ.

On utilise l'inégalité de $Gagliardo - Nirenberg$:

$$\forall v \in H^2_1(\Omega_\ell),\ |v(e_i)| \leq ||v||^{\frac{1}{2}}_{L^2_1(\Omega_\ell)} ||v||^{\frac{1}{2}}_{H^2_1(\Omega_\ell)}\ .$$

et puisque $S^{(0)}_{e_i}$ s'annule sur les e_i on a

$$\begin{aligned} ||S^{(0)}_{e_i} - u^1_\ell||_{H^1_1(\Omega_\ell)} &\leq ||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||_{H^1_1(\Omega_\ell)} \\ &\quad + ||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||^{\frac{1}{2}}_{L^2_1(\Omega_\ell)} ||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||^{\frac{1}{2}}_{H^2_1(\Omega_\ell)}, \end{aligned}$$

on utilise la remarque 1.6.1, la proposition 1.6.3 et la proposition 1.6.4, on obtient

$$\begin{aligned} ||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||_{H^1_1(\Omega_\ell)} &\leq c N_\ell^{2-s} ||S^{(0)}_{e_i}||_{H^s_{\star+}(\Omega)} \\ &\leq c N_\ell^{2-s} \varepsilon^{-q-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque $s = 2\lambda + 2 - \varepsilon$ et $N^\varepsilon_\ell = e$ on a

$$\begin{aligned} ||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||_{H^1_1(\Omega_\ell)} &\leq c N_\ell^{-2\lambda+\varepsilon} \varepsilon^{-q-\frac{1}{2}} \\ &\leq N_\ell^{-2\lambda} (\log N_\ell)^{q+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De la même façon on a

$$||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||^{\frac{1}{2}}_{L^2_1(\Omega_\ell)} \leq c N_\ell^{-\frac{s}{2}} ||S^{(0)}_{e_i}||^{\frac{1}{2}}_{H^s_{\star+}(\Omega)},$$

et

$$||S^{(0)}_{e_i} - \Pi^{+\ell}_{N_\ell} S^{(0)}_{e_i}||^{\frac{1}{2}}_{H^2_1(\Omega_\ell)} \leq c N_\ell^{2-\frac{s}{2}} ||S^{(0)}_{e_i}||^{\frac{1}{2}}_{H^s_{\star+}(\Omega)}.$$

D'où on déduit que

$$\begin{aligned} ||S_{e_i}^{(0)} - \Pi_{N_\ell}^{+\ell} S_{e_i}^{(0)}||_{L_1^2(\Omega_\ell)}^{\frac{1}{2}} ||S_{e_i}^{(0)} - \Pi_{N_\ell}^{+\ell} S_{e_i}^{(0)}||_{H_1^2(\Omega_\ell)}^{\frac{1}{2}} &\leq cN_\ell^{2-s} ||S_{e_i}^{(0)}||_{H_{\star+}^s(\Omega)} \\ &\leq N_\ell^{-2\lambda} (\log N_\ell)^{q+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Etape 2 : Construction de u_δ^2

La fonction u_δ^1 construite dans l'étape 1 n'appartient pas à $X_\delta^\diamond$, on construit u_δ^2 par relèvement et projection de u_δ^1 comme suit :

$$u_\delta^2 = \sum_{m=1}^{M^-} \tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-} (u_{\delta|\gamma_m^+}^1 - u_{\delta|\gamma_m^-}^1)|_{\gamma_m^-}, \tag{2.3.50}$$

où $\{\gamma_m^- \; 1 \leq m \leq M^-\}$ est l'ensemble des non joints. Ici on utilise les mêmes notations de $\tilde{\mathcal{R}}^\gamma$ et $\tilde{\pi}^\gamma$ que dans la proposition 2.3.5. On a

$$\left\|u_\delta^2\right\|_{H_1^1(\Omega_m^-)} \leq \sum_{m=1}^{M^-} \left\|\tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-} (u_{\delta|\gamma_m^+}^1 - u_{\delta|\gamma_m^-}^1)|_{\gamma_m^-}\right\|_{H_1^1(\Omega_m^-)}. \tag{2.3.51}$$

u_δ^1 est nul sur tous les e_i en dehors de $\{r = 0\}$, en plus u_δ^1 dépend du support de $S_{e_i}^{(0)}$ qui est pris assez petit. On note alors $\mathcal{J}_m^-$ l'ensemble des indices , $1 \leq \mu \leq M^+$, tel que $\gamma_m^- \cap \gamma_\mu^+ \cap$ support$\{S_{e_i}^{(0)}\}$ a une mesure non nulle. On écrit alors

$$\gamma_m^- = \sum_{\mu \in \mathcal{J}_m^-} \gamma_m^- \cap \gamma_\mu^+ \cap support\{S_{e_i}^{(0)}\},$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-} (u_{\delta|\gamma_m^+}^1 - u_{\delta|\gamma_m^-}^1)|_{\gamma_m^-}\right\|_{H_1^1(\Omega_m^-)} &\leq \left\|(u_{\delta|\gamma_m^+}^1 - S_{e_i}^{(0)}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)} \\ &+ \sum_{\mu \in \mathcal{J}_m^-} \left\|(u_{N_\mu^+}^1 - S_{e_i}^{(0)}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_\mu^+)}. \end{aligned}$$

En effet $u_{\delta|\gamma_m^-}^1$ s'annule sur tous les coins de γ_m^- donc $u_{\delta|\gamma_m^-}^1$ est dans $H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)$ et on peut écrire $u_{\delta|\gamma_m^-}^1 = \sum_{\mu \in \mathcal{J}_m^-} \tilde{u}_{N_\mu^+}^1$ où $\tilde{u}_{N_\mu^+}^1$ est le prolongement continu de $u_{N_\mu^+|\gamma_\mu^+}^1$ par 0 et on a la continuété de de l'opérateur $H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_\mu^+)$ dans $H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)$. D'où :

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathcal{R}}_\star^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{\gamma_m^-} (u_{\delta|\gamma_m^+}^1 - u_{\delta|\gamma_m^-}^1)|_{\gamma_m^-}\right\|_{H_1^1(\Omega_m^-)} &\leq c[(N_m^-)^{-2\lambda} (\log N_m^-)^{q+\frac{1}{2}} \\ &+ \sum_{\mu \in \mathcal{J}_m^-} (N_\mu^+)^{-2\lambda} (\log N_\mu^+)^{q+\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

Finalement on somme sur m avec $1 \leq m \leq M^-$.

Etape 3 : Construction de z_δ

On pose

$$\tilde{z}_\delta = u_\delta^1 + u_\delta^2. \tag{2.3.52}$$

On voit que $\tilde{z}_\delta$ vérifie la condition des joints mais $\tilde{z}_\delta^\ell$ n'est pas nul sur le bord Γ. Pour remédier à ce problème on prend

$$z_\delta = \tilde{z}_\delta - \sum_{\gamma \subset \Gamma \cap \bar{\Omega}_\ell,\ \ell \leq L_0} \tilde{\mathcal{R}}_+^\gamma(\tilde{z}_\delta|\gamma) - \sum_{\gamma \subset \Gamma \cap \bar{\Omega}_\ell,\ \ell > L_0} \tilde{\mathcal{R}}^\gamma(\tilde{z}_\delta|\gamma).$$

Comme $S_{e_i}^{(0)}|\Gamma = 0$ on a :

$$S_{e_i}^{(0)} = S_{e_i}^{(0)} - \sum_{\gamma \subset \Gamma \cap \bar{\Omega}_\ell,\ \ell \leq L_0} \tilde{\mathcal{R}}_+^\gamma(S_{e_i}^{(0)}|\gamma) - \sum_{\gamma \subset \Gamma \cap \bar{\Omega}_\ell,\ \ell > L_0} \tilde{\mathcal{R}}^\gamma(S_{e_i}^{(0)}|\gamma).$$

Enfin $S_{e_i}^{(0)} - z_\delta$ vérifie l'inégalité (2.3.48). ■

Remarque 2.3.7 *On a supposé dans notre preuve que la décomposition est quelconque au voisinage du point singulier. On peut aussi supposer que la décomposition est conforme au voisinage de ce coin.*

Maintenant on va utiliser ce dernier résultat, pour énoncer un théorème sur l'erreur entre la solution continue et la solution discrète.

Théorème 2.3.3 *On suppose que $f \in H_+^{s-1}(\Omega)$ avec $s > \frac{5}{2}$, alors il existe une constante positive c telle que, la solution $u \in H_1^1(\Omega)$ du problème (2.3.3) et la solution u_δ du problème discret vérifient :*

$$\|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, E_\delta\} \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)} \tag{2.3.53}$$

où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \ \ \textit{et}\ E_\delta = \max\{E_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \tag{2.3.54}$$

et

$$E_\ell = \begin{cases} 0 & \textit{si } \bar{\Omega}_\ell \textit{ ne contient pas des } e_i, \\ N_{e_i}^{-4}(\log N_{e_i})^{\frac{3}{2}} & \textit{si } \bar{\Omega}_\ell \textit{ contient } e_i \textit{ avec } \omega_{e_i} = \frac{\pi}{2}, \\ N_{e_i}^{-\frac{4}{3}}(\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}} & \textit{si } \bar{\Omega}_\ell \textit{ contient } e_i \textit{ avec } \omega_{e_i} = \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \tag{2.3.55}$$

N_{e_i} est défini dans la proposition 2.3.7.

Preuve On a

$$\begin{aligned} \inf_{v_\delta \in X_\delta^\diamond} \|u - v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \quad \leq \quad & c(\inf_{w_\delta \in X_\delta^\diamond} \|u_{reg} - w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \\ & + \inf_{z_\delta \in X_\delta^\diamond} \left|\gamma_e^{(0)}\right| \left\|S_e^{(0)} - z_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \\ & + \sum_{\ell \geq 2} \inf_{z_\delta \in X_\delta^\diamond} \left|\gamma_e^{(0)\ell}\right| \left\|S_e^{(0)} - z_\delta^\ell\right\|_{\mathcal{X}_1^1}). \end{aligned} \tag{2.3.56}$$

En effet on pose

$$u = u_{reg} + \gamma_e^{(0)} S_e^{(0)} + \sum_{\ell=2} \gamma_e^{(0)\ell} S_e^{(0)\ell} \text{ et } v_\delta = w_\delta + \gamma_e^{(0)} z_\delta + \sum_{\ell=2} \gamma_e^{(0)\ell} z_\delta^\ell.$$

On utilise la définition

$$S_e^{(0)} = \chi_e(r_e^\lambda) r_e^\lambda (\log r_e)^q \varphi(\theta_e) \text{ avec } \lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_j} + p,\ p \geq 0 \text{ et } q \geq 0.$$

et l'inégalité (2.3.7) avec $\lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_j}$, et $\ell = 1$. Pour le cas $\omega_j = \frac{\pi}{2}$, $q = 0$, on obtient $\left\|S_e^{(0)} - z_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq N_{e_i}^{-4}(\log N_{e_i})^{\frac{3}{2}}$. Et pour le deuxième cas $\omega_j = \frac{3\pi}{2}$, $q = 0$, on obtient $\left\|S_e^{(0)} - z_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \leq N_{e_i}^{-\frac{4}{3}}(\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}}$.

D'autre part d'après (1.6.22), on a $\left|\gamma_e^{(0)}\right| \leq c \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)}$ pour $s > 2$, d'où le résultat. ■

Remarque 2.3.8 *Sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente, on peut écrire une estimation où apparaissent des quantités locales.*

$$\begin{aligned} \|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \quad \leq \quad & c \sum_{\ell=1}^{L} [(1 + \lambda_\ell)^{\frac{1}{2}} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{p_\ell} \|u\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\ & + \sup(N_\ell^{-\sigma_\ell}, E_\ell) \left\|f_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)}]. \end{aligned} \tag{2.3.57}$$

Théorème 2.3.4 *On suppose que $f \in H_+^{s-1}(\Omega)$ avec $s > \frac{5}{2}$, alors il existe une constante positive c telle que, la solution $u \in H_1^1(\Omega)$ du problème (2.3.3) et la solution u_δ du problème discret vérifient :*

$$\|u - u_\delta\|_{L_1^2(\Omega)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}\log(N_\delta)^{\varrho} E_\delta\} \, \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)}, \tag{2.3.58}$$

où ϱ est nul si la décomposition est conforme et 1 sinon et E_δ est défini dans (2.3.54).

Preuve On a $\|u-u_\delta\|_{L_1^2(\Omega)} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|u-u_\delta\|^2_{L_1^2(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$. La majoration de $\|u-u_\delta\|^2_{L_1^2(\Omega)}$ s'obtient grâce à la méthode de dualité d'Aubin-Nitshe, qui consiste à remarquer que

$$\|u-u_\delta\|^2_{L_1^2(\Omega)} = \sup_{g \in L_1^2(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (u-u_\delta)(r,z)\, g(r,z)\, r dr dz}{\|g\|_{L_1^2(\Omega)}}.$$

Pour toute fonction g dans $L_1^2(\Omega)$ tel que $g_{|\Omega_\ell} = g_\ell$ pour chaque ℓ, $1 \leq \ell \leq L$ et on note χ_ℓ, la solution dans $H^1_{1\diamond}(\Omega_\ell)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta\chi_\ell = g_\ell & \text{dans } \Omega_\ell \\ \chi_\ell = 0 & \begin{cases} \text{sur } \partial\Omega_\ell \text{ si } \ell \geq L_0 \\ \text{sur } \Gamma_\ell \text{ si } \ell \leq L_0 \end{cases} \end{cases} \tag{2.3.59}$$

et on a

$$\int_\Omega (u-u_\delta)\, g \; r dr dz = -\sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \Delta\chi_\ell\,(u-u_\delta)\, d\tau.$$

Soit χ l'élément vérifiant $\chi_{|\Omega_\ell} = \chi_\ell$, on remarque que $\chi \in H^1_{1\diamond}(\Omega)$

$$\int_\Omega (u-u_\delta)\, g \; r dr dz = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \nabla\chi_\ell \nabla(u-u_\delta) d\tau - \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial\chi}{\partial n_m})[u-u_\delta] d\tau.$$

1) On remarque que $\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial\chi}{\partial n_m})[u-u_\delta] d\tau = \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial\chi}{\partial n_m})[u_\delta] d\tau$. On reprend la preuve de la proposition 2.3.6. La régularité de u nous permet de conclure comme dans (2.3.43) que

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_m^-} \frac{\partial\chi}{\partial n_m}[u-u_\delta](\tau)\, d\tau| \;\; &\leq \;\; C \left\| \frac{\partial\chi}{\partial n_m} - \psi^+ \right\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\gamma_m^-)} (\left\| u_{\delta|\Omega_{\gamma_m^-}} - u_{|\Omega_{\gamma_m^-}} \right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)} \\ &+ \left\| \Phi - u_{|\Omega_{\gamma_m^-}} \right\|_{H_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\gamma_m^-)}) \end{aligned} \tag{2.3.60}$$

On procède comme dans la preuve de la proposition 2.3.6 pour déduire que

$$\begin{aligned}
|\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \frac{\partial \chi}{\partial n_m} [u - u_\delta] (\tau) \, d\tau| &\leq c \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-1} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \|\chi_\ell\|_{H_1^2(\Omega_\ell)} \|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \\
&\leq c N_\delta^{-1} (\log N_\delta) \|g\|_{L_1^2(\Omega)} \|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} \qquad (2.3.61)
\end{aligned}$$

En effet puisque Ω_ℓ est convexe, alors $\chi_\ell \in H_1^2(\Omega_\ell)$ et on a $\|\chi_\ell\|_{H_1^2(\Omega_\ell)} \leq c \|g_\ell\|_{L_1^2(\Omega_\ell)}$.

On remarque que si la décomposition est conforme on a

$$|\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \frac{\partial \chi}{\partial n_m} [u - u_\delta] (\tau) \, d\tau| \leq c N_\delta^{-1} \|g\|_{L_1^2(\Omega)} \|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} .$$

2) Pour majorer le terme $a(\chi, u - u_\delta) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \nabla \chi_\ell \nabla (u - u_\delta) d\tau$, on choisit $\chi_{\delta-1}$ tel que pour chaque ℓ, $1 \leq \ell \leq L$

$$\chi_{\delta-1|\Omega_\ell} = \begin{cases} \tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{+,1,\diamond} \chi_\ell \text{ si } 1 \leq \ell \leq L_0 \\ \tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{-,1,\diamond} \chi_\ell \text{ si } L_0 \leq \ell \leq L \end{cases} \qquad (2.3.62)$$

où $\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{+,1,\diamond}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_{1\diamond}^1(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_{N_\ell-1}^{\diamond}(\Omega_\ell)$, et $\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{-,1,\diamond}$ l'opérateur de projection orthogonale de $V_{1\diamond}^1(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_{N_\ell-1}^0(\Omega_\ell)$ déduits de $\Pi_{N_\ell-1}^{+,1,\diamond}$ resp $\Pi_{N_\ell-1}^{-,1,\diamond}$ défini dans [8, Chapitre V]

On remarque que $\chi_{\delta-1} \in H_{1\diamond}^1(\Omega)$, ceci implique que

$$a(\chi_{\delta-1}, u - u_\delta) = \int_\Omega f \chi_{\delta-1} d\tau - (\mathcal{I}_\delta f, \chi_{\delta-1})_\delta$$

et que

$$a(\chi, u - u_\delta) = a(\chi - \chi_{\delta-1}, u - u_\delta) + \int_\Omega f \chi_{\delta-1} d\tau - (\mathcal{I}_\delta f, \chi_{\delta-1})_\delta.$$

On sait d'après 2) de la preuve de la proposition (2.3.2) que si $f \in H_+^{s-1}(\Omega)$ alors on a :

$$\begin{aligned}
|\int_\Omega f \chi_{\delta-1} d\tau - (\mathcal{I}_\delta f, \chi_{\delta-1})_\delta| &\leq c N_\delta^{1-s} \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)} \|\chi_{\delta-1}\|_{\mathcal{X}_1^1} \\
&\leq c N_\delta^{1-s} \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)} (\|\chi - \chi_{\delta-1}\|_{\mathcal{X}_1^1} + \|\chi\|_{\mathcal{X}_1^1}) \\
&\leq c N_\delta^{1-s} \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)} \|g\|_{L_1^2(\Omega)} \qquad (2.3.63)
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}\left\|\chi - \chi_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} &\leq c\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-1} \left\|\chi_\ell\right\|_{H_1^2(\Omega_\ell)} \\ &\leq cN_\delta^{-1} \left\|g\right\|_{L_1^2(\Omega)} .\end{aligned}$$

[8, Proposition V.3.2 et V.3.6]. Ceci implique aussi que

$$\begin{aligned}a(\chi - \chi_{\delta-1}, u - u_\delta) &\leq c\left\|\chi - \chi_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \left\|u - u_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \\ &\leq cN_\delta^{-1} \left\|g\right\|_{L_1^2(\Omega)} \left\|u - u_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} . \qquad (2.3.64)\end{aligned}$$

Pour majorer $\|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}$, on utilise l'estimation (2.3.57). En combinant (2.3.57), (2.3.63), (2.3.61) et (2.3.64), on déduit l'estimation (2.3.58). ■

Remarque 2.3.9 *Dans la preuve précédente, on est obligé de poser le problème (2.3.59), sur chaque sous-domaine avec nullité sur le bord, pour pouvoir assurer la condition de compatibilité. La difficulté vient du fait que l'espace discret n'est pas inclu dans l'espace continue et donc si on pose* χ *tel que*

$$-\Delta\chi = g \ \textit{dans } \Omega$$

$$\chi = 0 \ \textit{sur } \Gamma$$

alors pour un choix de $\chi_{\delta-1}$ *le même que celui dans (2.3.62), on aura* $a(\chi_{\delta-1}, u) \neq \int f\chi_{\delta-1}$*, ce qui bloque la suite de la démonstration.*

2.4 Le problème de Laplace : Cas général $(k \neq 0)$

2.4.1 Problème continu

On considère le problème de Laplace (1.6.9) dans un domaine tridimensionnel $\tilde{\Omega}$. On ne suppose plus dans cette section que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont invariantes par rotation et on développe la solution $\tilde{u}$ et les données initiales en séries de Fourier si bien que l'on se ramène à la résolution pour tout k d'un problème du type :

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u^k - \frac{1}{r}\partial_r u^k - \partial_z^2 u^k + \frac{k^2}{r^2}u^k = f^k & \textit{dans } \Omega, \\ u^k = 0 & \textit{sur } \Gamma. \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

où Ω est décomposé en polygônes comme dans la fig (1.6.1).

On définit les espaces $\mathcal{X}^1_{1*}(\Omega)$, $\mathcal{X}^1_{1\circ}(\Omega)$ et $\mathcal{V}^1_{1\diamond}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}^1_{1*}(\Omega) = \{v = (v_1, .., v_\ell) \in \prod_{\ell=1}^{L} H^1_1(\Omega_\ell) \cap L^2_{-1}(\Omega_\ell)\} \\
&\mathcal{X}^1_{1\circ}(\Omega) = \{v \in \mathcal{X}^1_{1*}(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}^1_{1\diamond}(\Omega) = \{v = (v_1, .., v_\ell) \in \prod_{\ell=1}^{L} H^1_1(\Omega_\ell) \cap L^2_{-1}(\Omega) \\
&v_\ell = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et } v_m = v_\ell \text{ sur } \gamma^{m\ell}, 1 \leq m < \ell \leq L\}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{V}^1_{1\diamond}(\Omega)$ est isomorphe à $V^1_{1\diamond}(\Omega) = H^1_{1\diamond}(\Omega) \cap L^2_{-1}(\Omega)$.

On munit $\mathcal{X}^1_{1*}(\Omega)$ de la norme $\|.\|_{\mathcal{X}^1_*}$ définie par :

$$\|v\|_{\mathcal{X}^1_*} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}} \tag{2.4.3}$$

où

$$\|v_\ell\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} = (\|v_\ell\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)} + |k|^2 \|v_\ell\|^2_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}).$$

On pose

$$a_k(u^k, v) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \nabla \left(u^k_\ell\right)(r, z) \nabla (\bar{v}_\ell)(r, z)\, rdrdz + k^2\left(\frac{u^k}{r}, \frac{v}{r}\right) \tag{2.4.4}$$

où

$$(u^k, v) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} (u^k_\ell \bar{v}_\ell)(r, z)\, rdrdz.$$

La formulation variationnelle du problème (2.4.1) est pour $k \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{c}
\text{Trouver } u^k \in \mathcal{V}^1_{1\diamond}(\Omega), \\
\text{vérifiant, } \forall v \in \mathcal{V}^1_{1\diamond}(\Omega), \\
a_k(u^k, v) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} f^k\ \bar{v}_\ell\ rdrdz.
\end{array}\right. \tag{2.4.5}$$

Proposition 2.4.1 *Le problème (2.4.5) admet une solution unique u^k. Cette solution vérifie :*

$$\left\|u^k\right\|_{\mathcal{X}^1_*} \leq c \left\|f^k\right\|_{L^2_1(\Omega).}$$

Preuve On a

$$a_k(u,v) = \sum_{\ell=1}^{L}\Big(\int_{\Omega_\ell} \nabla\left(u_\ell\right)(r,z)\,\nabla\left(\bar{v}_\ell\right)(r,z)\,rdrdz + k^2\int_{\Omega_\ell}\left(u_\ell\bar{v}_\ell\right)(r,z)\,r^{-1}drdz\Big)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}
a_k(u,v) &\leq \sum_{\ell=1}^{L}\left(\|u_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)}\|v_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k^2\|u_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\|v_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\right)\\
&\leq \sum_{\ell=1}^{L}\left(\|u_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\|u_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\right)\left(\|v_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\|v_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\right)\\
&\leq \Big[\sum_{\ell=1}^{L}\left(\|u_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\|u_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\right)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\sum_{\ell=1}^{L}\left(\|v_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\|v_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\right)^2\Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et

$$a_k(u,v) \leq 2\,\|u\|_{\mathcal{X}_*^1}\|v\|_{\mathcal{X}_*^1}\,.$$

On en déduit que a_k est continue sur $\mathcal{V}^1_{1\diamond}(\Omega)^2$. La coercivité de a_k découle du fait que l'on a :

$$a_k(u,u) = \|u\|^2_{\mathcal{X}_*^1}\,.$$

En plus on a :

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\mathcal{X}_*^1} &= a_k(u,u)\\
&= \sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}\left(f^k_{|\Omega_\ell}\bar{u}_\ell\right)(r,z)\,rdrdz.\\
&\leq c\,\|u\|^2_{\mathcal{X}_*^1}\left\|f^k\right\|_{L_1^2(\Omega).}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

2.4.2 Problème discret

Pour définir le problème discret, on rappelle l'espace introduit dans (2.3.9)

$X_\delta^\diamond = \{v_\delta \in L_1^2(\Omega)\,/ v_\ell = v_{\delta|\Omega_\ell} \in P_{N_\ell}(\Omega_\ell)$, $1 \leq \ell \leq L$ et $v_\delta = 0$ sur Γ et il existe une

fonction joint ϕ définie par $\phi_{|\Gamma^{\ell,j}} = u_{\ell|\Gamma^{\ell,j}}$ si $(\ell,j) = (\ell(m), j(m))$ et $\int_{\Gamma^{\ell,j}}(u_\ell - \phi)(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \forall\psi \in \mathbb{P}_{N_{\ell-2}}\left(\Gamma^{\ell,j}\right)$ sinon$\}$.

et on définit l'espace X_δ° par :

$$X_\delta^\circ(\Omega) = \left\{ v_\delta \in X_\delta^\diamond(\Omega) \ / \ v_\ell = v_{\delta|\Omega_\ell} \in L^2_{-1}(\Omega_\ell), 1 \leq \ell \leq L \right\}.$$

On remarque que

$$X_\delta^\circ(\Omega) = \{ v_\delta \in X_\delta^\diamond(\Omega), \, v_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}.$$

La discrétisation du problème (2.4.5) par méthode de Galerkin avec intégration numérique pour $k \neq 0$ est:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta^k \text{ dans } X_\delta^\circ(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v_\delta \in X_\delta^\circ(\Omega), \quad a_{k,\delta}\left(u_\delta^k, v_\delta\right) = \left(\mathcal{I}_\delta f^k, v_\delta\right)_\delta, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

où la forme $a_{k,\delta}(.,.)$ est définie par :

$$a_{k,\delta}(u_\delta, v_\delta) = a_\delta(u_\delta, v_\delta) + k^2 \left(\frac{u_\delta}{r}, \frac{v_\delta}{r} \right)_\delta.$$

et $\mathcal{I}_\delta$ est l'opérateur d'interpolation introduit dans la section 2.3.2.2 .

Proposition 2.4.2 *Il existe des constantes c et c' indépendantes de k, de la géométrie de Ω et de sa décomposition telles que, pour tout entier fixe $k \neq 0$, la forme $a_{k,\delta}(.,.)$ satisfait les propriétés de continuité et de coercivité suivantes :*

$$\begin{cases} \forall u_\delta \in X_\delta^\circ(\Omega), \forall v_\delta \in X_\delta^\circ(\Omega) \\ |a_{k,\delta}(u_\delta, v_\delta)| \leq c \, \|u_\delta\|_{\mathcal{X}_*^1} \|v_\delta\|_{\mathcal{X}_*^1} \\ a_{k,\delta}(u_\delta, u_\delta) \geq c' \, \|u_\delta\|^2_{\mathcal{X}_*^1} \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Preuve On a d'après (2.3.13)

$$a_\delta(u_\delta, v_\delta) \leq c \sum_{\ell=1}^{L} |u_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} |v_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)}. \tag{2.4.8}$$

En plus on a $\frac{u_\delta}{r} \in \mathbb{P}_{N_\ell - 1}$ si Ω_ℓ intersecte Γ_0, soit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (2.2.5) si $\ell \leq L_0$ et (2.2.6) si $L_0 + 1 \leq \ell \leq L$ on obtient :

$$k^2 \left(\frac{u_\delta}{r}, \frac{v_\delta}{r} \right)_\delta \leq c k^2 \sum_{\ell=1}^{L} \|u_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)} \|v_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}. \tag{2.4.9}$$

D'où on déduit que

$$a_{k,\delta}\left(u_\delta, v_\delta\right) \leq c\sum_{\ell=1}^{L}(|u_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\left\|u_\ell\right\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)})(|v_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\left\|v_\ell\right\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}).$$

En utilisant, une autre fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$a_{k,\delta}\left(u_\delta, v_\delta\right) \leq C\left\|u_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}\left\|v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1},$$

où C est une constante indépendante de k. On a d'autre part

$$a_{k,\delta}\left(u_\delta, u_\delta\right) = a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right) + k^2\left(\frac{u_\delta}{r}, \frac{u_\delta}{r}\right)_\delta.$$

En utilisant (2.3.14), (2.3.12), (2.2.5) et (2.2.6), on obtient

$$a_{k,\delta}\left(u_\delta, u_\delta\right) \geq c(\left\|u_\delta\right\|^2_{\mathcal{X}_1^1} + k^2\sum_{\ell=1}^{L}\left\|u_\ell\right\|^2_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}),$$

d'où

$$a_{k,\delta}\left(u_\delta, u_\delta\right) \geq c\left\|u_\delta\right\|^2_{\mathcal{X}_*^1}$$

où c est une constante indépendante de k. ■

Théorème 2.4.1 *Le problème (2.4.6), admet une solution unique u_δ^k dans $X_\delta^\circ(\Omega)$ qui vérifie :*

$$\left\|u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \leq c\left\|f^k\right\|_{L_1^2(\Omega)} \tag{2.4.10}$$

Preuve La proposition précédente implique l'existence et l'unicité de la solution. On a ensuite

$$\left(\mathcal{I}_\delta f^k, u_\delta^k\right)_\delta \leq \left\|u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1}\left\|f^k\right\|_{L_1^2(\Omega)}$$

d'où

$$C\left\|u_\delta^k\right\|^2_{\mathcal{X}_*^1} \leq a_{k,\delta}\left(u_\delta^k, u_\delta^k\right) \leq \left\|u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1}\left\|f^k\right\|_{L_1^2(\Omega)}.$$

L'inégalité (2.4.10) en découle. ■

2.4.3 Estimations d'erreur

On va maintenant estimer l'erreur entre la solution continue et la solution discrète et montrer que comme dans le cas invariant par rotation, cette erreur est majorée par l'erreur d'approximation, l'erreur de consistance, l'erreur de quadrature et une erreur due à la non conformité sur les interfaces. Et traiter ensuite ces erreurs une à une.

Proposition 2.4.3 *Soit u^k la solution du problème continu (2.4.5) et u_δ^k la solution du problème discret (2.4.6), il existe une constante C telle que l'on ait :*

$$\begin{aligned}\left\|u^k-u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \leq\; & C\Big(\inf_{v_\delta\in X_\delta^\circ}\Big\{\left\|u^k-v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \\ & +\sup_{w_\delta\in X_\delta^\circ}\frac{a_k\left(v_\delta,w_\delta\right)-a_{k,\delta}\left(v_\delta,w_\delta\right)}{\left\|w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}}\Big\} \\ & +\sup_{w_\delta\in X_\delta^\circ}\frac{\int_\Omega f^k w_\delta r\,dr\,dz-\left(\mathcal{I}_\delta f^k,w_\delta\right)_\delta}{\left\|w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}} \\ & +\sup_{w_\delta\in X_\delta^\circ}\frac{\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}\left(\frac{\partial u^k}{\partial n_m}\right)[w_\delta]d\tau}{\left\|w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}}\Big)\end{aligned}$$

Preuve Par ellipticité de $a_{k,\delta}$, il existe $\beta>0$ tel que pour tout $v_\delta\in\mathcal{X}_{1\circ}^1(\Omega)$ on a

$$\beta\left\|u_\delta^k-v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}^2\leq a_{k,\delta}\left(u_\delta^k-v_\delta,u_\delta^k-v_\delta\right)$$

On pose $u_\delta^k-v_\delta=w_\delta$. On a

$$a_{k,\delta}\left(u_\delta^k-v_\delta,w_\delta\right)=-a_{k,\delta}\left(v_\delta,w_\delta\right)+(\mathcal{I}_\delta f^k,w_\delta)_\delta.$$

Comme on a $-\int_\Omega(\Delta u^k)w_\delta r\,dr\,dz-\int_\Omega f^k w_\delta r\,dr\,dz=0$, avec $-\Delta u^k=-\partial_r^2u^k-\frac{1}{r}\partial_r u^k-\partial_z^2u^k+\frac{k^2}{r^2}u^k$ on obtient

$$\begin{aligned}-\int_\Omega(\Delta u^k)w_\delta r\,dr\,dz \;=\;& -\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}\left(\frac{\partial u}{\partial n_m}\right)[w_\delta]d\tau \\ & +\sum_{\ell=1}^L\int_{\Omega_\ell}\nabla u^k\nabla w_\delta r\,dr\,dz \\ & +k^2\sum_{\ell=1}^L\int_{\Omega_\ell}u^k w_\delta r^{-1}dr\,dz,\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

en déduit alors que

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega}(\Delta u^k)w_\delta r dr dz &= -\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}\left(\frac{\partial u}{\partial n_m}\right)[w_\delta]d\tau \\ &\quad + a_k\left(u_\delta^k, w_\delta\right). \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

où $[w_\delta]$ est le saut de w_δ à travers $\gamma^{\ell m}$. On déduit que

$$\begin{aligned} a_{k,\delta}\left(u_\delta^k - v_\delta, w_\delta\right) &= -a_{k,\delta}\left(v_\delta, w_\delta\right) + (\mathcal{I}_\delta f^k, w_\delta)_\delta \\ &\quad - \int_\Omega (\Delta u^k) w_\delta r dr dz - \int_\Omega f^k w_\delta r dr dz. \end{aligned}$$

On remplace $-\int_\Omega (\Delta u^k) w_\delta r dr dz$ par sa valeur donnée dans (2.4.12) on obtient

$$\begin{aligned} a_{k,\delta}\left(u_\delta^k - v_\delta, w_\delta\right) &= -a_{k,\delta}\left(v_\delta, w_\delta\right) + a_k\left(v_\delta, w_\delta\right) \\ &\quad -\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}\left(\frac{\partial u^k}{\partial n_m}\right)[w_\delta]d\tau \\ &\quad + (\mathcal{I}_\delta f^k, w_\delta)_\delta, - \int_\Omega f^k w_\delta r dr dz. \end{aligned}$$

Enfin en utilisant

$$\left\|u^k - u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \le \left\|u^k - v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1} + \left\|u_\delta^k - v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1},$$

on obtient le résultat. ■

Proposition 2.4.4 ***:erreur d'approximation***

Soit u^k la solution du problème (2.4.5). On suppose que $u^k_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)$ et $s_\ell > \frac{1}{2}$ ($s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \le L_0$). Alors on a

$$\inf_{v_\delta \in X_\delta^\circ} \left\|u^k - v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \le c\lambda_\delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} ||u^k||_{H_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{2.4.13}$$

où λ_δ est définie dans (2.3.25), pour tout joint γ_μ^+, $1 \le \mu \le M^+$ et non joint γ_m^-, $1 \le m \le M^-$ tels que $\gamma_\mu^+ \cap \gamma_m^-$ a une mesure positive.

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant dont la preuve figure dans [8, Chapitre IV.4 et Chapitre V.4].

Lemme 2.4.1 *Il existe un opérateur de projection,*

$$\tilde{\pi}_N^{(k),1} : V_1^1(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{P}_N^*(\Lambda)$$

qui vérifie :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (\tilde{\varphi} - \tilde{\pi}_N^{(k),1}\tilde{\varphi})\psi d\tau &= 0, \ \forall \psi \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda). \\ \left\| \tilde{\varphi} - \tilde{\pi}_N^{(k),1}\tilde{\varphi} \right\|_{H^1_{(k)}(\Lambda)} &\leq CN^{1-s} \left\| \tilde{\varphi} \right\|_{H^s_{(k)}(\Lambda)}. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

En plus on a pour $s \geq 1$:

$$\left\| \varphi - \tilde{\pi}_N^{(k),1,(r)} \circ \tilde{\pi}_N^{1,(z)} \varphi \right\|_{H^1_{(k)}(\Sigma)} \leq cN^{1-s} \left\| \varphi \right\|_{H^s_{(k)}(\Sigma)}, \ \forall \varphi \in H^s_{(k)}(\Sigma) \tag{2.4.15}$$

et si Σ n'intersecte pas l'axe $\{\zeta = -1\}$ on a :

$$\left\| \varphi - \tilde{\pi}_N^{1,(r)} \circ \tilde{\pi}_N^{1,(z)} \varphi \right\|_{H^1_{(k)}(\Sigma)} \leq cN^{1-s} \left\| \varphi \right\|_{H^s_{(k)}(\Sigma)}, \ \forall \varphi \in H^s_{(k)}(\Sigma). \tag{2.4.16}$$

Preuve de la proposition 2.4.4 La preuve se déduit de la preuve de la proposition 2.3.5 et suit les mêmes étapes. On va donner ici les changements à faire pour chaque étape.

Etape 1 : On pose

$$v_\ell^1 = \mathcal{I}_{N_\ell}^{(k)} u^k \text{ sur } \Omega_\ell$$

On a d'après [8, Chapitre VI.3], pour $s_\ell > \frac{1}{2}$

$$\left\| u^k_{|\Omega_\ell} - v^1_\ell \right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq CN_\ell^{-s_\ell} \left\| u^k_{|\Omega_\ell} \right\|_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)}. \tag{2.4.17}$$

et

$$\left\| u^k_{|\Omega_\ell} - v^1_\ell \right\|_{H^1_{(k)}(\Gamma)} + N_\ell \left\| u^k_{|\Omega_\ell} - v^1_\ell \right\|_{L^2_1(\Gamma)} \leq C' N_\ell^{\frac{1}{2}-s_\ell} \left\| u^k_{|\Omega_\ell} \right\|_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)}, \ 1 \leq \ell \leq L. \tag{2.4.18}$$

où Γ est un côté de Ω_ℓ.

Etape 2 : On pose

$$v_\delta^2 = \sum_{\mu=1}^{M^+} \sum_{e \in \mathcal{C}_\mu} (u^k - v^1_{\delta|\Omega^+_\mu})(e) \tilde{\Phi}_{\mu,e}$$

où $\tilde{\Phi}_{\mu,e}$ est défini dans la preuve de la proposition 2.3.5. En utilisant (2.3.29) on a

$$\left\|\varphi_i^-\right\|^2_{L^2_1(\Lambda)} \leq cN^{-1} \text{ et } \left\|\eta_p\right\|_{L^2_1(\Lambda)} \leq cN^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.19}$$

d'où

$$\left\|(1-\zeta^2)\varphi_i^-\right\|_{L^2_{-1}(\Lambda)} \leq c\left\|\varphi_i^-\right\|_{L^2_1(\Lambda)} \leq cN^{-\frac{1}{2}}$$

en déduit que

$$\left\|\eta_p\right\|_{L^2_{-1}(\Lambda)} \leq cN^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.20}$$

D'autre part on a $\chi_N = (\frac{1-\eta}{2})^N$ qui vérifie

$$\left\|(\frac{1-\eta}{2})^N\right\|_{H^s_1(\Omega)} \leq cN^{s-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.21}$$

En combinant (2.4.19), (2.4.20) et (2.4.21), on obtient que

$$|k|\left\|\tilde{\Phi}_{\mu,e}\right\|_{L^2_{-1}(\Omega)} \leq c|k|N^{-1}.$$

En utilisant le fait que $|k|N_\delta^{-1} \leq 1$ et $\left\|\tilde{\Phi}_{\mu,e}\right\|_{H^1_1(\Omega)} \leq c'$, on déduit que

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left\|v_\delta^2\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq c\sum_{\mu=1}^{M^+}(N_\mu^+)^{-s_\mu^+}\left\|u^k\right\|_{H^{s_\mu^++1}_{(k)}(\Omega_\mu^+)}.$$

De même on a :

$$\left\|v_\delta^2\right\|_{H^1_1(\gamma_\mu^+)} \leq c(N_\mu^+)^{\frac{1}{2}-s_\mu^+}\left\|u^k\right\|_{H^{s_\mu^++1}_{(k)}(\Omega_\mu^+)}, \tag{2.4.22}$$

et

$$\left\|v_\delta^2\right\|_{L^2_1(\gamma_m^-)} \leq c(N_\mu^+)^{-\frac{1}{2}-s_\mu^+}\left\|u^k\right\|_{H^{s_\mu^++1}_{(k)}(\Omega_\mu^+)}.$$

Etape 3 : On note :

$$\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-} = \begin{cases} \tilde{\pi}_{\delta,m}^{(k),1,(r)} & \text{si } \gamma_m^- \text{ parallèle à (Or)} \\ \tilde{\pi}_{\delta,m}^{(k),1,(z)} & \text{si } \gamma_m^- \text{ parallèle à (Oz).} \end{cases}$$

et on pose

$$v_\delta^{12} = v_\delta^1 + v_\delta^2$$

et

$$v_\delta^{3*} = \begin{cases} \tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-})(\tau)\tilde{\chi}_{N_m^-}(\sigma)] \text{ dans } \bar{\Omega}_m^- \\ 0 \text{ dans } \Omega\backslash\bar{\Omega}_m^-. \end{cases} \tag{2.4.23}$$

On a enfin

$$v_\delta^3 = \sum_{m=1}^{M^-} v_\delta^{3*}.$$

où τ resp σ sont les variables tangentielle resp normale à γ_m^- et $\tilde{\chi}_{N_m^-}$ est obtenu de $\chi_{N_m^-}$ par homothétie et translation $(\chi_{N_m^-}(\sigma) = (\frac{1-\sigma}{2})^{N_m^-})$. Pour simplifier on notera $\chi_{N_m^-}$ au lieu de $\tilde{\chi}_{N_m^-}$. L'idée de cette construction est inspiré de [8, (V.6.6)], avec quelques changements. On considère seulement le cas où γ_m^- est parallèle à (Or). On pose $v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-} = z^{12}$

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})(\tau)\chi_{N_m^-}(\sigma)\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}_{(k)}(\Omega_m^-)} \leq\ & c(\left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})\right\|_{H^1_1(\gamma_m^-)} \left\|\chi_{N_m^-}\right\|_{L^2_1(\Lambda_m^-)} \\ & + \left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})\right\|_{L^2_1(\gamma_m^-)} \left\|\chi_{N_m^-}\right\|_{H^1_1(\Lambda_m^-)} \\ & + |k| \left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})\right\|_{L^2_{-1}(\gamma_m^-)} \left\|\chi_{N_m^-}\right\|_{L^2_1(\Lambda_m^-)}). \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

d'où en déduit que

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})(\tau)\chi_{N_m^-}(\sigma)\right\|_{H^{1,\gamma_m^-}_{(k)}(\Omega_m^-)} \leq\ & c(\left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})\right\|_{L^2_1(\gamma_m^-)} \left\|\chi_{N_m^-}\right\|_{H^1_1(\Lambda_m^-)} \\ & + \left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})\right\|_{H^1_{(k)}(\gamma_m^-)} \left\|\chi_{N_m^-}\right\|_{L^2_1(\Lambda_m^-)}). \end{aligned}$$

(*) D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12})\right\|_{L^2_1(\gamma_m^-)} \leq\ & \left\|v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{L^2_1(\gamma_m^-)} \\ \leq\ & c[(N_m^-)^{-\frac{1}{2}-s_m^-} \left\|u^k\right\|_{H^{s_m^-+1}_{(k)}(\Omega_m^-)} \\ & + \sum_{\mu\in\mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{-\frac{1}{2}-s_\mu^+} \left\|u^k\right\|_{H^{s_\mu^++1}_{(k)}(\Omega_\mu^+)}]. \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

En déduit que

$$\begin{aligned} \left\|v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{L^2_1(\gamma_m^-)} \left\|\chi_{N_m^-}\right\|_{H^1_1(\Lambda_m^-)} \leq\ & c(N_m^-)^{-s_m^-} \left\|u^k\right\|_{H^{s_m^-+1}_{(k)}(\Omega_m^-)} \\ & + c_{1\gamma_m^-} \sum_{\mu\in\mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \left\|u^k\right\|_{H^{s_\mu^++1}_{(k)}(\Omega_\mu^+)} \end{aligned}$$

avec

$$c_{1\gamma_m^-} = (N_m^-)^{\frac{1}{2}} / \min_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}},$$

et $c_{1\gamma_m^-} \leq \lambda_\delta^{\frac{1}{2}}$.

(**) D'après (2.4.18) et (2.4.22) on a

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\pi}_\delta^{(k),\gamma_m^-}(z^{12}) \right\|_{H^1_{(k)}(\gamma_m^-)} \left\| \chi_{N_m^-} \right\|_{L^2_1(\Lambda_m^-)} &\leq c \left\| v^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - v^{12}_{\delta|\gamma_m^-} \right\|_{H^1_{(k)}(\gamma_m^-)} \left\| \chi_{N_m^-} \right\|_{L^2_1(\Lambda_m^-)} \\
&\leq c(N_m^-)^{-s_m^-} \left\| u^k \right\|_{H^{s_m^-+1}_{(k)}(\Omega_m^-)} \\
&\quad + c_{2\gamma_m^-} \sum_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \left\| u^k \right\|_{H^{s_\mu^++1}_{(k)}(\Omega_\mu^+)} .
\end{aligned}$$

avec

$$c_{2\gamma_m^-} = \max_{\mu \in \mathcal{K}_m^-} (N_\mu^+)^{\frac{1}{2}} / (N_m^-)^{\frac{1}{2}}$$

et $c_{2\gamma_m^-} \leq \lambda_\delta^{\frac{1}{2}}$. Et on termine la preuve en sommant sur m.

Le cas où γ_m^- est parallèle à (Oz) se traite de la même façon.

Ainsi la fonction $v_\delta = v_\delta^1 + v_\delta^2 + v_\delta^3$, appartient à l'espace discret X_δ° et vérifie l'inégalité (2.4.13). ■

Remarque 2.4.1 *On remarque que l'étape 3 de la preuve a été changé par rapport à la preuve de la proposition 2.3.5, en effet si on avait utilisé le relèvement $\tilde{\mathcal{R}}_\star^\gamma$ défini dans 2.3.37, on aurait alors une estimation du type*

$$\inf_{v_\delta \in X_\delta^\circ} \left\| u^k - v_\delta \right\|_{\mathcal{X}^1_*} \leq c \lambda_\delta^{\frac{1}{2}} |k| \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\| u^k \right\|_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)} .$$

Corollaire 2.4.1 *Dans le cas d'une décomposition conforme avec k et N_δ choisis de façon quelconque, on a :*

$$\inf_{v_\delta \in X_\delta^\circ} \left\| u^k - v_\delta \right\|_{\mathcal{X}^1_*} \leq c \lambda_\delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\| u^k \right\|_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)} . \qquad (2.4.26)$$

Preuve Dans la preuve on a pas besoin de l'étape 2, donc la condition $k \leq N_\delta$, ne sera plus nécéssaire. En plus on a $c_{1\gamma_m^-} = (N_m^-)^{\frac{1}{2}} / (N_m^+)^{\frac{1}{2}}$ et $c_{2\gamma_m^-} = (N_m^+)^{\frac{1}{2}} / (N_m^-)^{\frac{1}{2}}$.

■

Proposition 2.4.5 ***:erreur d'interfaces***

Soit u^k la solution du problème (2.4.5) et w_δ dans $X_\delta^\circ(\Omega)$, alors on a

$$|\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial u^k}{\partial n_m})[w_\delta] d\tau| \leq c[\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \left\|u^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}] \left\|w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}.$$

et ϱ_ℓ est égal à 1 si l'un des côtés de Ω_ℓ est γ_m^- et intersecte au moins deux sous-domaines $\bar{\Omega}_{\ell'}$, $\ell' \neq \ell$ et 0 sinon.

Preuve On utilise la même démarche que dans le cas axisymétrique, on conclut comme dans (2.3.44) que

$$|\int_{\gamma_m^-} \frac{\partial u^k}{\partial n} [w_\delta] (\tau) \, d\tau| \leq C(1 + c\varepsilon^{-1}) N_m^{-s_m} \left\|u^k\right\|_{H_{(k)}^{s_m+1}(\Omega_m)} \left\|w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}, \qquad (2.4.27)$$

avec $\varepsilon = 1/\log N_m$, d'où le résultat. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner une estimation de l'erreur locale :

Proposition 2.4.6 *On suppose que avec $s_\ell > \frac{1}{2}$ ($s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$), et f^k une fonction tel que $f^k_{|\Omega_\ell} \in H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)$ avec $\sigma_\ell > 2$. Alors il existe une constante positive c indépendante de k telle que :*

$$\begin{aligned} \left\|u^k - u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1} &\leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \left\|u^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\ &\quad + c\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \left\|f^k\right\|_{H_{(k)}^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)}. \end{aligned}$$

où u^k est la solution du problème continu (2.4.5) et u_δ^k la solution du problème discret (2.4.6) et ϱ_ℓ est défini dans la proposition 2.4.5.

Preuve On a

$$a_{k,\delta}(v_\delta, w_\delta) - a_k(v_\delta, w_\delta) \leq c\{\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\|u^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} + \left\|u^k - v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1}\}.$$

En effet on utilise l'opérateur de projection orthogonale $\Pi_{N_\ell-1}^{(k)}$ de $H_{(k)}^1(\Omega)$ dans $H_{(k)}^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_{N_\ell-1}(\Omega)$ et [8, Proposition V.4.2]. Suivant la démarche de la preuve de la proposition (2.3.2) on obtient :

$$\begin{aligned}
|a_{k,\delta}(v_\delta - x_{\delta-1}, w_\delta) - a_k(v_\delta - x_{\delta-1}, w_\delta)| &\leq c\{\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\delta - x_{\delta-1}\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}\}^{\frac{1}{2}} \|w_\delta\|_{\mathcal{X}^1_*} \\
&\leq c\{\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u^k - \Pi^{(k)}_{N_\ell-1} u^k\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \\
&\quad + \left\|u^k - v_\delta\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|a_{k,\delta}(v_\delta - x_{\delta-1}, w_\delta) - a_k(v_\delta - x_{\delta-1}, w_\delta)| &\leq c\{\left\|u^k - v_\delta\right\|_{\mathcal{X}^1_*} \\
&+\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} ||u^k_\ell||_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)}\}. \|w_\delta\|_{\mathcal{X}^1_*}.
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

D'autre part on a

$$\left| \frac{\int_\Omega f^k w_\delta r dr dz - \left(\mathcal{I}_\delta f^k, w_\delta\right)_\delta}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}^1_*}} \right| \leq C \sum_{\ell=1}^{L} N^{-\sigma_\ell} ||f^k||_{H^{\sigma_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}, \tag{2.4.29}$$

en effet on utilise les mêmes operateurs que dans 2) du théorème 2.3.2.

En combinant (2.4.28), (2.4.29), les propositions 2.4.4 et 2.4.5 on obtient l'estimation d'erreur requise. ■

2.4.4 Estimations d'erreur (Cas avec singularités)

Avant d'énoncer un théorème important sur les estimations d'erreurs des singularités, on commence par donner quelques résultats.

Proposition 2.4.7 *Soit $S^{(k)}_{e_i}$ appartenant à $\pounds^{(k)\lambda,q}_e$ défini dans (1.6.26) et $q > 0$ fixé. Alors pour tout $Re(\lambda) > 0$, on a*

$$\inf_{z_\delta \in X^\circ_\delta} ||S^{(k)}_{e_i} - z_\delta||_{\mathcal{X}^1_*} \leq c|k| N_{e_i}^{-2\lambda} (\log N_{e_i})^{q+1} \tag{2.4.30}$$

avec

$$N_{e_i} = \min\{N_\ell, \Omega_\ell \cap supp(S^{(0)}_{e_i}) \neq \varnothing, 1 \leq \ell \leq L\}.$$

Preuve Etape 1 : Construction de $u_\delta^{1,k}$

On considère le support de $S_{e_i}^{(k)}$ assez petit, pour que sa valeur soit nulle sur les côtés ne contenant pas e_i. Sur chaque domaine Ω_ℓ, on considère $\Pi_{N_\ell}^{-,\ell} S_{e_i}^{(k)}$. Ensuite on considère la fonction $u_\delta^{1,k}$ telle que

$$u_{\delta|\Omega_\ell}^{1,k} = u_\ell^{1,k}.$$

avec

$$u_\ell^{1,k}(r,z) = \Pi_{N_\ell}^{-,\ell} S_{e_i}^{(k)}(r,z) - \sum_j \Pi_{N_\ell}^{-,\ell} S_{e_i}^{(k)}(e_j)\eta^j(r,z)$$

où η^j est un polynôme dans $\mathbb{P}_1(\Omega_\ell)$, qui est égal à 1 en e_j et 0 sur les deux autres côtés dans Ω_ℓ qui ne contiennent pas e_j. Alors $u_\ell^{1,k}(r,z)$ est nul sur les e_j de Ω_ℓ qui ne sont pas sur l'axe $r=0$, (evidemment il est nul sur les e en dehors de Ω_ℓ).On a d'après [8, ChapitreV.7]

$$||S_{e_i}^{(k)} - u_\ell^{1,k}||_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq cN_\ell^{-2\lambda}(\log N_\ell)^{q+\frac{1}{2}}$$

Etape 2 : Construction de $u_\delta^{2,k}$

On utilise les mêmes notations de $\tilde{\mathcal{R}}_-^\gamma$ et $\tilde{\pi}_{N_\ell}^{(k),\gamma}$que dans la proposition 2.4.4, et on répète la même démarche que dans la proposition 2.3.7. On pose comme dans (2.3.50)

$$u_\delta^{2,k} = \sum_{m=1}^{M^-} \tilde{\mathcal{R}}_-^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{(k),\gamma_m^-}(u_{\delta|\gamma_m^+}^{1,k} - u_{\delta|\gamma_m^-}^{1,k})|_{\gamma_m^-},$$

et

$$\left\| u_\delta^{2,k} \right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_m^-)} \leq \sum_{m=1}^{M^-} \left\| \tilde{\mathcal{R}}_-^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{(k),\gamma_m^-}(u_{\delta|\gamma_m^+}^{1,k} - u_{\delta|\gamma_m^-}^{1,k})|_{\gamma_m^-} \right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_m^-)}. \tag{2.4.31}$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{R}}_-^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{(k),\gamma_m^-}(u_{\delta|\gamma_m^+}^{1,k} - u_{\delta|\gamma_m^-}^{1,k})|_{\gamma_m^-} \right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_m^-)} \leq \; & c|k|(\left\| u_{\delta|\gamma_m^+}^{1,k} - S_{e_i}^{(k)} \right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)} \\ & + \sum_{\mu\in\mathcal{J}_m^-} \left\| u_{N_\mu^+}^{1,k} - S_{e_i}^{(k)} \right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_\mu^+)}). \end{aligned} \tag{2.4.32}$$

et

$$\left\|\tilde{\mathcal{R}}_{-}^{\gamma_m^-} \circ \tilde{\pi}^{(k),\gamma_m^-}(u_{\delta|\gamma_m^+}^{1,k} - u_{\delta|\gamma_m^-}^{1,k})|_{\gamma_m^-}\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_m^-)} \leq c|k|[(N_m^-)^{-2\lambda}(\log N_m^-)^{q+\frac{1}{2}} + \sum_{\mu\in\mathcal{J}_m^-}(N_\mu^+)^{-2\lambda}(\log N_\mu^+)^{q+\frac{1}{2}}].$$

Etape 3 : Construction de z_δ

On pose

$$\tilde{z}_\delta = u_\delta^{1,k} + u_\delta^{2,k}. \tag{2.4.33}$$

et

$$z_\delta = \tilde{z}_\delta - \sum_{\gamma\subset\Gamma\cap\bar{\Omega}_\ell} \tilde{\mathcal{R}}_{-}^{\gamma}(\tilde{z}_\delta|\gamma),$$

et on termine la preuve comme dans la preuve de la proposition 2.3.7. ■

2.4.4.1 Estimations d'erreur globale

Remarque 2.4.2 *1) On suppose dorénavant que*

$$K \leq N_\ell \text{ pour } 1 \leq \ell \leq L. \tag{2.4.34}$$

Grâce à la condition (2.4.34), comme le prouve le théorème suivant, on a les mêmes estimations que dans le cas du problème où la solution discrète est prise dans un espace continue $X_\delta \subset V^1_{1\diamond}(\Omega)$ voir [8, Chapitre VIII].

Théorème 2.4.2 *On suppose que $f^k \in H_-^{s-1}(\Omega)$, avec $s > \frac{5}{2}$, alors il existe une constante positive c telle que, pour toutes fonctions u^k dans $V^1_{1\diamond}(\Omega)$ solution du problème (2.4.5), et u_δ^k solution du problème discret on a :*

$$\left\|u^k - u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}^1_*} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, E_\delta\} \left\|f^k\right\|_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)}$$

où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \text{ et } E_\delta = \max\{E_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$$

et E_ℓ est défini dans (2.3.55).

Preuve La preuve se déduit des preuves des propositions 2.4.3 et (2.3.2) et de la proposition 2.4.7 en utilisant la définition

$$S_e^{(k)} = \chi_e(|k|r_e^\lambda)r_e^\lambda(\log(|k|r_e)^q\varphi(\theta_e) \text{ avec } \lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_j} + p \text{ où } p \text{ et } q \geq 0.$$

et l'inégalité (2.4.7) avec $\lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_j}$, et $\ell = 1$. Pour le cas $\omega_j = \frac{\pi}{2}$, $q = 0$, on obtient $\left\|S_e^{(k)} - z_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \leq |k| N_{e_i}^{-4}(\log N_{e_i})^{\frac{3}{2}}$. Et pour le deuxième cas $\omega_j = \frac{3\pi}{2}$, $q = 0$, on obtient $\left\|S_e^{(k)} - z_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \leq |k| N_{e_i}^{-\frac{4}{3}}(\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}}$.

D'autre part d'après (1.6.22), on a $|k|\left|\gamma_e^{(k)}\right| \leq c\left\|f^k\right\|_{H_{(k)}^{s-1}(\Omega)}$, pour $s > 2$, d'où le résultat. ∎

Remarque 2.4.3 *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, on peut utiliser une estimation en fonction de quantités locales :*

$$\begin{aligned} \left\|u^k - u_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_*^1} \quad \leq \quad & c\sum_{\ell=1}^{L}[(1+\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}} N_\ell^{-s_\ell}\log(N_\ell)^{\varrho_\ell}\left\|u^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\ & + \sup\{N_\ell^{1-s}, E_\ell\}\left\|f^k\right\|_{H_{(k)}^{s-1}(\Omega_\ell)}]. \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

où ϱ_ℓ est défini dans la proposition 2.4.5.

Théorème 2.4.3 *On suppose que $f \in H_-^{s-1}(\Omega)$ avec $s > \frac{5}{2}$, alors il existe une constante positive c telle que, la solution $u^k \in V_{1\diamond}^1(\Omega)$ du problème (2.3.3) et la solution u_δ du problème discret vérifient :*

$$\left\|u^k - u_\delta^k\right\|_{L_1^2(\Omega)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}\log(N_\delta)^{\varrho}E_\delta\}\left\|f^k\right\|_{H_1^{s-1}(\Omega)}, \tag{2.4.36}$$

où ϱ est nul si la décomposition est conforme et vaut 1 sinon et E_δ est défini dans (2.3.54).

Preuve On procède de la même façon que dans la preuve du théorème (2.3.4). On a

$$\left\|u^k - u_\delta^k\right\|_{L_1^2(\Omega)} = \sup_{g\in L_1^2(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega \left(u^k - u_\delta^k\right) g \; r dr dz}{\|g\|_{L_1^2(\Omega)}}.$$

Pour toute fonction g dans $L^2_1(\Omega)$, on note χ^k_ℓ l'unique solution dans $V^1_{1\diamond}(\Omega_\ell)$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta\chi^k_\ell = g_\ell & \text{dans } \Omega_\ell, \\ \chi^k_\ell = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\ell. \end{cases}$$

Soit χ^k tel que $\chi^k_{|\Omega_\ell} = \chi^k_\ell$, on a $\chi^k \in V^1_{1\diamond}(\Omega)$ et

$$\int_\Omega (u^k - u^k_\delta)\, g\; rdrdz = a_k(\chi^k, u^k - u^k_\delta) - \sum_{\gamma^-_m \in \mathcal{S}} \int_{\gamma^-_m} (\frac{\partial \chi^k}{\partial n_m})[u^k - u^k_\delta] d\tau.$$

1) On utilise 1) de la preuve de la proposition 2.3.4 et (2.4.5), pour déduire que

$$|\sum_{\gamma^-_m \in \mathcal{S}} \int_{\gamma^-_m} \frac{\partial \chi^k}{\partial n_m} \left[u^k - u^k_\delta\right](\tau)\, d\tau| \leq N_\delta^{-1} (\log N_\delta) \|g\|_{L^2_1(\Omega)} \left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}^1_*}.$$

Si la décomposition est conforme on a

$$|\sum_{\gamma^-_m \in \mathcal{S}} \int_{\gamma^-_m} \frac{\partial \chi^k}{\partial n} \left[u^k - u^k_\delta\right](\tau)\, d\tau| \leq N_\delta^{-1} \|g\|_{L^2_1(\Omega)} \left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}^1_*}. \tag{2.4.37}$$

2) Pour majorer le terme $a_k(\chi^k, u^k - u^k_\delta)$, on choisit $\chi^k_{\delta-1}$ tel que pour chaque ℓ, $1 \leq \ell \leq L$, on a

$$\chi^k_{\delta-1|\Omega_\ell} = \tilde{\Pi}^{-,1,\diamond}_{N_\ell - 1} \chi_\ell$$

et $\tilde{\Pi}^{-,1,\diamond}_{N_\ell - 1}$ l'opérateur de projection orthogonale de $V^1_{1\diamond}(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}^0_{N_\ell - 1}(\Omega_\ell)$ décrit dans la preuve du théorème (2.3.4). On remarque que $\chi^k_{\delta-1} \in H^1_{1\diamond}(\Omega)$, ceci implique que

$$\begin{aligned} |a_k(\chi^k_{\delta-1}, u^k - u^k_\delta)| &= |\int_\Omega f^k \chi^k_{\delta-1} d\tau - (\mathcal{I}_\delta f^k, \chi^k_{\delta-1})_\delta| \\ &\leq cN_\delta^{1-s} \left\|f^k\right\|_{H^{s-1}_1(\Omega)} (\left\|\chi^k - \chi^k_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}^1_*} + \left\|\chi^k\right\|_{\mathcal{X}^1_*}). \end{aligned} \tag{2.4.38}$$

Puisqu'on a

$$\left\|\chi^k - \chi^k_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}^1_*} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-1} \left\|\chi^k_\ell\right\|_{H^2_1(\Omega_\ell)}.$$

[8, Proposition V.3.2 et V.3.6], on déduit que

$$a_k(\chi^k - \chi^k_{\delta-1}, u^k - u^k_\delta) \leq cN_\delta^{-1} \|g\|_{L^2_1(\Omega)} \left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}^1_*}. \tag{2.4.39}$$

Pour majorer le terme $\left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}^1_*}$, on utilise l'estimation (2.4.35). En combinant (2.4.37), (2.4.38) et (2.4.39), on déduit (2.4.36). ■

2.5 Retour au problème tridimensionnel

Pour le retour au problème tridimentionnel, On définit pour K un entier fixé $\breve{u}_K$ et $\breve{u}_{K,\delta}$ par :

$$\breve{u}_K(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} u^k\,(r,z)\, e^{ik\theta}, \tag{2.5.1}$$

et

$$\breve{u}_{K,\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} u^k_\delta\,(r,z)\, e^{ik\theta}. \tag{2.5.2}$$

où $u^0_\delta\,(r,z)$ est solution du problème (2.3.11) pour des données f^0 et g^0,

et $u^k_\delta\,(r,z)$, $(k \neq 0)$ est solution du problème (2.4.6) pour des données f^k et g^k.

Et on définit $\breve{u}^*_{K,\delta}$ par

$$\breve{u}^*_{K,\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} u^k_{K,\delta}\,(r,z)\, e^{ik\theta}, \tag{2.5.3}$$

où $u^0_{K,\delta}\,(r,z)$ est solution du problème (2.3.11) pour des données f^0_K et g^0_K,

et $u^k_{K,\delta}\,(r,z)\,,\,(k \neq 0)$ est solution du problème (2.4.6) pour des données f^k_K et g^k_K.

L'erreur de troncature entre $\breve{u}$ et $\breve{u}_K$ est estimée comme suit voir $[8, (\mathbf{VII.1.3}) et (\mathbf{II.1.8})]$:

$$||\breve{u} - \breve{u}_K||_{H^t(\breve{\Omega})} \leq cK^{t-s}||\breve{u}||_{H^s(\breve{\Omega})}. \tag{2.5.4}$$

Et d'après les définitions de $\breve{u}_K$ et $\breve{u}_{K,\delta}$, on remarque que $\breve{u}_{K,\delta}$ n'appartient pas l'espace $H^1(\breve{\Omega})$, et on a :

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u}_K - \breve{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c \sum_{|k|\leq K} \left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega)}. \tag{2.5.5}$$

On va donner, dans le théorème suivant, une estimation d'erreur globale entre la solution exacte $\breve{u}$ et la solution tronquée à l'ordre K discrétisée par la méthode spectrale.

Théorème 2.5.1 *On suppose que $\breve{f} \in H^{s-1}(\breve{\Omega})$ avec $s > \frac{5}{2}$. Soit $\breve{u}$ la solution du problème (1.6.9) $\breve{u}_{K,\delta}$ et $\breve{u}^*_{K,\delta}$ les sommes finies induites dans (2.5.2) et (2.5.3). On a*

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \breve{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \{\sup(N_\delta^{1-s}, E_\delta) + K^{-s}\} \left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} \tag{2.5.6}$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{u} - \breve{u}^*_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, E_\delta) + K^{1-s}\} \left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}. \tag{2.5.7}$$

Où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \;\; et \; E_\delta = \max\{E_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$$

et E_ℓ est défini dans (2.3.55).

Preuve 1) **Preuve de** (2.5.6)

En utilisant (2.5.4) et (2.5.5), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \breve{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} &\leq \sum_{\ell=1}^{L} (\|\breve{u} - \breve{u}_K\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} + \|\breve{u}_K - \breve{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}) \\
&\leq c\{K^{-s}\|\breve{u}\|_{H^{s+1}(\breve{\Omega})} + \sum_{\ell=1}^{L}\sum_{|k|\leq K} \left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}\} \\
&\leq c\{K^{-s}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} + \sum_{|k|\leq K}(\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})\}.
\end{aligned}$$

D'après les théorèmes 2.3.3 et 2.4.2 on a

$$\|u - u_\delta\|_{\mathcal{X}^1_1} \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{N_\delta^{1-s}, E_\delta\}\|f\|_{H^{s-1}_1(\Omega)} \text{ si } k = 0 \tag{2.5.8}$$

et

$$\left\|u^k - u^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}^1_*} \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\sup\{N_\delta^{1-s}, E_\delta\}\left\|f^k\right\|_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)} \text{ si } k \neq 0 \tag{2.5.9}$$

on utilise le fait que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|f^k\right\|_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)} \simeq \left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} \tag{2.5.10}$$

et que $\|.\|_{H^s_1(\Omega)} = \|.\|_{H^s_{(0)}(\Omega)}$ pour déduire (2.5.6) à partir de (2.5.8-2.5.9).

2) **Preuve de** (2.5.7)

Utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{u} - \breve{u}^*_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq \sum_{\ell=1}^{L} (\|\breve{u} - \breve{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} + \left\|\breve{u}_{K,\delta} - \breve{u}^*_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}).$$

Le terme $\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \breve{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}$ est majoré par (2.5.6). On remarque que pour majorer le terme $\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{u}_{K,\delta} - \breve{u}^*_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}$, il suffit de majorer $\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u^k_\delta - u^k_{K,\delta}\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}$. D'après l'ellipticité et la continuité de $a_\delta(.,.)$ et $a_{k,\delta}(.,.)$ on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u^k_\delta - u^k_{K,\delta}\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} &\leq c\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^k - f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
&\leq c\sum_{\ell=1}^{L} \{||f^k - \mathcal{I}_\delta f^k||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
&\quad +||f^k_K - \mathcal{I}_\delta f^k_K||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \\
&\quad +||f^k - f^k_K||_{L^2_1(\Omega_\ell)}\}.
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Comme on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ voir (2.3.46)

$$||f^k - \mathcal{I}_\delta f^k||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \leq cN_\ell^{1-s}||f^k||_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega_\ell)},$$

on en déduit, moyennant (2.5.10) que

$$\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||f^k - \mathcal{I}_\delta f^k||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \leq cN_\delta^{1-s}||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} \tag{2.5.12}$$

Pour le deuxième terme de droite de l'inégalité (2.5.11) on a :

$$\begin{aligned}
||f^k_K - \mathcal{I}_\delta f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)} &\leq cN_\ell^{1-s}||f^k_K||_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega_\ell)} \\
&\leq cN_\ell^{1-s}(||f^k - f^k_K||_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega_\ell)} \\
&\quad +||f^k||_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega_\ell)}).
\end{aligned}$$

On somme sur ℓ et k et on utilise (2.5.4), (1.6.5) et (2.5.4) pour déduire que :

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||f^k - f^k_K||_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega_\ell)} &\leq c||\breve{f} - \breve{f}_K||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} \\
&\leq c||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}
\end{aligned}$$

et que par conséquent

$$\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||f^k_K - \mathcal{I}_\delta f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \leq cN_\delta^{1-s}||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}. \tag{2.5.13}$$

Enfin pour le troisième terme de droite de l'inégalité (2.5.11) on a

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}}||f^k - f_K^k||_{L_1^2(\Omega_\ell)} &\leq c||\breve{f} - \breve{f}_K||_{L^2(\breve{\Omega})} \\ &\leq cK^{1-s}||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}}||f^k - f_K^k||_{H_{(k)}^{s-1}(\Omega_\ell)} \leq cK^{1-s}||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}. \tag{2.5.14}$$

Combinant (2.5.11)-(2.5.14), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{L}\left\|\breve{u}_{K,\delta} - \breve{u}_{K,\delta}^*\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} &\leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell=1}^{L}\left\|u_\delta^k - u_{K,\delta}^k\right\|_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} \\ &\leq c(K^{1-s} + N_\delta^{1-s})||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

qui est l'estimation requise. ■

Théorème 2.5.2 *On suppose que* $\breve{f} \in H^{s-1}(\breve{\Omega})$ *avec* $s > \frac{5}{2}$*. Soit* $\breve{u}$ *la solution du problème (1.6.9)* $\breve{u}_{K,\delta}$ *et* $\breve{u}_{K,\delta}^*$ *les sommes finies induites (2.5.2) et (2.5.3). On a*

$$\begin{aligned}\|\breve{u} - \breve{u}_{K,\delta}\|_{L^2(\breve{\Omega})} &\leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}\log(N_\delta)^{\varrho}E_\delta) \\ &\quad +K^{-1-s}\}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}.\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|\breve{u} - \breve{u}_{K,\delta}^*\right\|_{L^2(\breve{\Omega})} &\leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}\log(N_\delta)^{\varrho}E_\delta) \\ &\quad +K^{1-s}\}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}.\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \text{ et } E_\delta = \max\{E_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}.$$

ϱ *est nul si la décomposition est conforme et vaut 1 sinon et* E_δ *est défini dans (2.3.54).*

Preuve 1) **Preuve de** (2.5.16)

En utilisant (2.5.4) et (2.5.5), on a

$$\begin{aligned}
\|\breve{u}-\breve{u}_{K,\delta}\|_{L^2(\breve{\Omega})} &\leq \|\breve{u}-\breve{u}_K\|_{L^2(\breve{\Omega})}+\|\breve{u}_K-\breve{u}_{K,\delta}\|_{L^2(\breve{\Omega})} \\
&\leq c\{K^{-1-s}||\breve{u}||_{H^{s+1}(\breve{\Omega})}+\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{|k|\leq K}\left\|u^k-u^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)}\} \\
&\leq c\{K^{-1-s}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}+\sum_{|k|\leq K}(\sum_{\ell=1}^{L}\left\|u^k-u^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)})\}. \\
&\leq c\{K^{-1-s}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}+\sum_{|k|\leq K}\left\|u^k-u^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega)}\} \\
&\leq c\{K^{-1-s}+\sup(N_\delta^{1-s},N_\delta^{-1}(\log N_\delta)E_\delta)\}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

2) **Preuve de** (2.5.17) :

Graçe à (2.5.15), on conclut que

$$\left\|\breve{u}_{K,\delta}-\breve{u}^*_{K,\delta}\right\|_{L^2(\breve{\Omega})}\leq c(K^{1-s}+N_\delta^{1-s})||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}. \tag{2.5.19}$$

En combinant 1) et (2.5.19), on déduit (2.5.17). ■

2.5.1 Algorithme de Strang et Fix : cas axisymétrique

On note S_1 la première fonction singulière qui apparaît dans la solution du problème (2.3.3).

On considère ensuite l'espace

$$\mathring{X}_\delta = \quad X^\diamond_\delta+\mathbb{R}S_1.$$

Remarque 2.5.1 *On va dans ce qui suit étudier le cas d'une singularité due à un coin convexe et celui de la singularité due à un coin non convexe. On note*

$$\begin{aligned}
\mathring{u}_\delta &= u_\delta+\lambda S_1, \\
\mathring{v}_\delta &= v_\delta+\mu S_1.
\end{aligned}$$

On munit l'espace $\mathring{X}_\delta$ *des normes* $\|.\|_\circ$ *et* $\|.\|_{\circ 1}$ *définies par*

$$\|\mathring{v}_\delta\|_\circ = \sum_{\ell=1}^{L}(\|v_\ell\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)} + |\lambda|^2 \left\|S_{1|\Omega_\ell}\right\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$$

et (2.5.20)

$$\|\mathring{v}_\delta\|_{\circ 1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{v}_{\delta|\Omega_\ell}\right\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}.$$

On définit la forme bilinéaire discrète sur $\mathring{X}_\delta(\Omega)$ *comme suit :*

$$\begin{aligned}\mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta\right) &= a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right) + \sum_{\ell=1}^{L}(\lambda \int_{\Omega_\ell} \nabla S_1 \nabla v_\ell r dr dz \\ &+\mu \int_{\Omega_\ell} \nabla u_\ell \nabla S_1 r dr dz + \lambda\mu \int_{\Omega_\ell} \left(\nabla S_1\right)^2 r dr dz).\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Tenant compte des singularités, le problème (2.3.11) devient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathring{u}_\delta \in \mathring{X}_\delta(\Omega) \text{ vérifiant} \\ \qquad \forall \mathring{u}_\delta \in \mathring{X}_\delta(\Omega) \\ \quad \mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta\right) = \left(\mathcal{I}_\delta f, \mathring{v}_\delta\right)_\delta . \end{cases} \tag{2.5.22}$$

Remarque 2.5.2 *On remarque que*

$$\|.\|_{\circ 1} \leq c \, \|.\|_\circ \tag{2.5.23}$$

avec une c constante indépendante de N et que $(\mathring{X}_\delta, \|.\|_\circ)$ *est un espace de Hilbert.*

Proposition 2.5.1 *Il existe une constante* α *positive et indépendante de* δ *qui vérifie :*

$$\left|\mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta\right)\right| \leq \alpha \left\|\mathring{u}_\delta\right\|_\circ \left\|\mathring{v}_\delta\right\|_\circ \ \forall \left(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta\right) \in \mathring{X}_\delta(\Omega) \times \mathring{X}_\delta(\Omega). \tag{2.5.24}$$

Preuve On a pour $(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta) \in \mathring{X}_\delta(\Omega) \times \mathring{X}_\delta(\Omega)$

$$\begin{aligned}\mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta\right) &= \sum_{\ell=1}^{L_0}\sum_{i=1}^{N_{\ell+1}}\sum_{j=0}^{N_\ell}(\nabla u_{\delta|\Omega_\ell} \nabla v_{\delta|\Omega_\ell})\left(\zeta^\ell_j, \xi^\ell_i\right)\omega^\ell_i \rho^\ell_j \\ &+ \sum_{\ell=L_0+1}^{L}\sum_{i,j=0}^{N_\ell}(\nabla u_{\delta|\Omega_\ell} \nabla v_{\delta|\Omega_\ell})(\xi^{(r)\ell}_i, \xi^\ell_j)\xi^{(r)}_i \rho^\ell_i \rho^\ell_j \\ &+\sum_{\ell=1}^{L}(\lambda \int_{\Omega_\ell} \nabla S_1 \nabla v_\ell r dr dz + \mu \int_{\Omega_\ell} \nabla u_\ell \nabla S_1 r dr dz \\ &+\lambda\mu \int_{\Omega_\ell} \left(\nabla S_1\right)^2 r dr dz).\end{aligned}$$

Les deux premiers termes correspondent à $a_\delta(u_\delta, v_\delta)$, et on a d'après (2.3.13)

$$\begin{aligned} |a_\delta(u_\delta, v_\delta)| &\leq 4\sum_{\ell=1}^{L}(\|\partial_r u_\ell\|_{L_1^2(\Omega_\ell)}\|\partial_r v_\ell\|_{L_1^2(\Omega_\ell)} \\ &\quad + \|\partial_z u_\ell\|_{L_1^2(\Omega_\ell)}\|\partial_z v_\ell\|_{L_1^2(\Omega_\ell)}) \\ &\leq 4\sum_{\ell=1}^{L}|u_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)}|v_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)}. \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Le terme restant peut être majoré par :

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{\ell=1}^{L}(\lambda\int_{\Omega_\ell}\nabla S_1\nabla v_\ell r dr dz + \mu\int_{\Omega_\ell}\nabla u_\ell \nabla S_1 r dr dz \right. \\ &\qquad \left. + \lambda\mu\int_{\Omega_\ell}(\nabla S_1)^2 r dr dz)\right| \\ \leq\ & \sum_{\ell=1}^{L}\{|\lambda||S_1|_{H_1^1(\Omega_\ell)}|v_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + |\mu||S_1|_{H_1^1(\Omega_\ell)}|u_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} \\ & + |\lambda||\mu||S_1|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)}\}. \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

En combinant les deux termes 2.5.25 et 2.5.26 on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathring{a}_\delta(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta)| &\leq C\sum_{\ell=1}^{L}\left(|u_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + |\lambda||S_1|_{H_1^1(\Omega_\ell)}\right) \\ &\quad \left(|v_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + |\mu||S_1|_{H_1^1(\Omega_\ell)}\right). \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité $(a+b) \leq c(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ pour conclure que

$$\begin{aligned} |\mathring{a}_\delta(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta)| &\leq C\sum_{\ell=1}^{L}\left(|u_\ell|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)} + |\lambda|^2|S_1|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(|v_\ell|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)} + |\mu|^2|S_1|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc (2.5.24) est vérifiée. ■

Proposition 2.5.2 *Il existe une constante α positive telle que :*

$$\forall \mathring{u}_\delta \in \mathring{X}_\delta(\Omega) \quad \mathring{a}_\delta(\mathring{u}_\delta, \mathring{u}_\delta) \geq \alpha\,\|\mathring{u}_\delta\|^2_\circ. \tag{2.5.27}$$

Pour la preuve de cette proposition, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5.1 *Soit S appartenant à $L_1^2(\Omega)\backslash\mathbb{P}_N(\Omega)$. Il existe $\rho_N < 1$ qui ne dépend que de N et S, tel que :*

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega), \quad \int_\Omega S u_N r dr dz \leq \rho_N \|S\|_{L_1^2(\Omega)} \|u_N\|_{L_1^2(\Omega)}. \tag{2.5.28}$$

Preuve 1) Si l'un des termes $\|S\|_{L_1^2(\Omega)}$ ou $\|u_N\|_{L_1^2(\Omega)}$ est nul, alors u_N ou S est nul presque partout et l'inégalité (2.5.28) est vérifiée.

2) On suppose S non nul et on note $\Pi_N S$ la projection orthogonale de S sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$. On a

$$\int_\Omega (S - \Pi_N S) u_N r dr dz = 0$$

et

$$\|S - \Pi_N S\|^2_{L_1^2(\Omega)} + \|\Pi_N S\|^2_{L_1^2(\Omega)} = \|S\|^2_{L_1^2(\Omega)}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\int_\Omega S u_N r dr dz\right|}{\|S\|_{L_1^2(\Omega)} \|u_N\|_{L_1^2(\Omega)}} &= \frac{\left|\int_\Omega (\Pi_N S) u_N r dr dz\right|}{\|S\|_{L_1^2(\Omega)} \|u_N\|_{L_1^2(\Omega)}} \\
&\leq \frac{\|\Pi_N S\|_{L_1^2(\Omega)}}{\|S\|_{L_1^2(\Omega)}} \\
&\leq \sqrt{1 - \frac{\|S - \Pi_N S\|^2_{L_1^2(\Omega)}}{\|S\|^2_{L_1^2(\Omega)}}} \\
&= \rho_N < 1.
\end{aligned}$$

en effet le terme $S - \Pi_N S$ n'est jamais nul. ■

Remarque 2.5.3 *On remarque que $\rho_N \to 1$ si $N \to +\infty$. De point de vue numérique on peut supposer que N est fini.*

Preuve de la proposition 2.5.2. On a

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_\delta(\mathring{u}_\delta, \mathring{u}_\delta) &= a_\delta(u_\delta, v_\delta) + \sum_{\ell=1}^{L} (2\lambda \int_{\Omega_\ell} \nabla S_1 \nabla v_\ell r dr dz \\
&\quad + \lambda^2 \int_{\Omega_\ell} (\nabla S_1)^2 r dr dz).
\end{aligned}$$

On utilise (2.2.5) pour déduire que :

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_\delta(\mathring{u}_\delta,\mathring{u}_\delta) &\geq \sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}(\nabla u_\ell)^2\, rdrdz \\
&\quad -\sum_{\ell=1}^{L} 2\lambda\rho_{N_\ell}\|\nabla S_1\|_{L_1^2(\Omega_\ell)}\|\nabla u_\ell\|_{L_1^2(\Omega_\ell)} \\
&\quad +\lambda^2\int_{\Omega_\ell}(\nabla S_1)^2\, rdrdz) \\
&\geq (1-\rho)\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}[(\nabla u_\ell)^2+\lambda^2(\nabla S_1)^2]rdrdz, \\
(\rho &= \sup\{\rho_{N_\ell}, 1\leq \ell\leq L\}).
\end{aligned}$$

D'où (2.5.27) est prouvé. ■

Remarque 2.5.4 *On peut prouver plus facilement que*

$$\mathring{a}_\delta(\mathring{u}_\delta,\mathring{u}_\delta) \geq \alpha\|\mathring{u}_\delta\|^2_{\circ 1}\,\forall \mathring{u}_\delta\in\mathring{X}_\delta.$$

En effet on a

$$\begin{aligned}
& a_\delta(u_\delta,u_\delta)+\sum_{\ell=1}^{L}(2\lambda\int_{\Omega_\ell}\nabla S_1\nabla u_\ell rdrdz \\
& +\lambda^2\int_{\Omega_\ell}(\nabla S_1)^2 rdrdz) \\
\geq\ & c\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}(\nabla\mathring{u}_\ell)^2 rdrdz = c\sum_{\ell=1}^{L}|\mathring{u}_\ell|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)}.
\end{aligned}$$

Utilisant la continuité et la coercivité de $\mathring{a}_\delta$ sur $\mathring{X}_\delta$ on a le théorème suivant.

Théorème 2.5.3 *Pour toute fonction f appartenant à $L_1^2(\Omega)$, le problème (2.5.22) admet une solution unique $\mathring{u}_\delta$ dans $\mathring{X}_\delta$ vérifiant :*

$$\|\mathring{u}_\delta\|_\circ \leq C\|f\|_{L_1^2(\Omega)}$$

2.5.2 Estimation d'erreurs

On va maintenant, étudier l'erreur entre la solution continue du problème (2.3.3) et la solution discrète qui tient compte des singularités.

Proposition 2.5.3 *Soit u la solution du problème continue (2.3.3) et $\mathring{u}_\delta$ la solution du problème discret (2.5.22). On a :*

$$\begin{aligned} \|u - \mathring{u}_\delta\|_\circ \leq\ & C\Big(\inf_{\mathring{v}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \{\|u - \mathring{v}_\delta\|_\circ \\ & + \sup_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \frac{\mathring{a}\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right) - \mathring{a}_\delta\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right)}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ}\} \\ & + \sup_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \frac{\int_\Omega f \mathring{w}_\delta r dr dz - (\mathcal{I}_\delta f, \mathring{w}_\delta)_\delta}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ} \\ & + \sup_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \left(\frac{\partial u}{\partial n_m}\right) [\mathring{w}_\delta] d\tau}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ}\Big). \end{aligned} \tag{2.5.29}$$

Preuve La preuve est exactement identique à la preuve de la proposition 2.3.4.

■

Proposition 2.5.4 *Soit $\sigma_\ell > 1$, on suppose que $f_{|\Omega_\ell} \in H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)$ et que $u_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)$, avec $s_\ell > \frac{1}{2}$ ($s_\ell > \frac{3}{2}$ si $1 \leq \ell \leq L_0$), alors on a :*

1)

$$\sup_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \frac{\mathring{a}\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right) - \mathring{a}_\delta\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right)}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ} \leq C[\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \|u\|_{H^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}] , \tag{2.5.30}$$

2)

$$\sup_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \frac{\int_{\Omega_\ell} f \mathring{w}_\delta dx dy - (\mathcal{I}_\delta f, \mathring{w}_\delta)_\delta}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ} \leq C \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \|f\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)} , \tag{2.5.31}$$

3)

$$\sup_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \left(\frac{\partial u}{\partial n_m}\right) [\mathring{w}_\delta] d\tau}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ} \leq C[\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{p_\ell} \|u\|_{H^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}] \tag{2.5.32}$$

où p_ℓ est donné dans la proposition 2.3.6.

Preuve 1) On remarque que d'après la définition $\mathring{a}_\delta(.,.)$ on a

$$\mathring{a}\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right) - \mathring{a}_\delta\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right) = a\left(v_\delta, w_\delta\right) - a_\delta\left(v_\delta, w_\delta\right)$$

en plus $\frac{1}{\|\mathring{w}_\delta\|_\circ}$ est majoré par $\frac{1}{\|w_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}}$, on en déduit alors l 'inégalité (2.5.30).

2) La preuve de (2.5.31) est identique à la preuve du 2) de la proposition (2.4.3).

3) Pour prouver (2.5.32), on remarque qu'au voisinage de e, le terme $\left(\mathring{w}_{\delta|\Omega_k} - \mathring{w}_{\delta|\Omega_\ell}\right)$ est égal à $\left(w_{\delta|\Omega_k} - w_{\delta|\Omega_\ell}\right)$ puisque S_1 est continue et qu'à l'extérieur de ce voisinage, on a l'égalité encore car S_1 est nul. ■

Théorème 2.5.4 *Soit $s > \frac{5}{2}$. On suppose que $f \in H_+^{s-1}(\Omega)$. Il existe une constante positive c telle que, pour toute fonction u dans $H_1^1(\Omega)$ solution du problème (2.3.3), et tout $\mathring{u}_\delta$ solution du problème discret (2.5.22) on a :*

$$\|u - \mathring{u}_\delta\|_\circ \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta\} \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)}$$

où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \ \ et \ \mathring{E}_\delta = \max\left\{\mathring{E}_\ell, 1 \leq \ell \leq L\right\}$$

et

$$\mathring{E}_\ell = \begin{cases} 0 & si\ \bar{\Omega}_\ell \ ne\ contient\ pas\ des\ e_i, \\ N_{e_i}^{-8}(\log N_{e_i})^{\frac{3}{2}} & si\ \bar{\Omega}_\ell\ contient\ e_i\ avec\ \omega_j = \frac{\pi}{2}, \\ N_{e_i}^{\frac{-8}{3}}(\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}} & si\ \bar{\Omega}_\ell\ contient\ e_i\ avec\ \omega_j = \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \tag{2.5.33}$$

N_{e_i} est défini dans la proposition 2.3.7.

Preuve Il reste uniquement à estimer l'erreur d'approximation dans la proposition 2.5.3.

On a $u = u_{reg} + \lambda S_1 + \mu S_2$ et $\mathring{v}_\delta = z_\delta + \lambda S_1 + \mu w_\delta$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \inf_{\mathring{w}_\delta \in \mathring{X}_\delta} \|u - \mathring{v}_\delta\|_\circ \ \leq \ & \inf_{z_\delta \in X_\delta^\diamond} \|u_{reg} - z_\delta\|_\circ \\ & + \inf_{w_\delta \in X_\delta^\diamond} |\lambda| \, \|S_2 - w_\delta\|_\circ + \ldots \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.5, on a

$$\inf_{z_\delta \in X_\delta^\diamond} \|u_{reg} - z_\delta\|_\circ \leq c\lambda_\delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\|u_{\delta|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{2.5.34}$$

Pour le deuxième terme, on utilise la définition de $S_e^{(0)} = \chi_e(r_e^\lambda) r_e^\lambda (\log r_e)^q \varphi(\theta_e)$ et l'inégalité (2.3.48) avec $\lambda = \frac{\ell\pi}{\omega_j}$, et $\ell = 2$. Pour le cas $\omega_j = \frac{\pi}{2}, q = 0$, on obtient

$$\inf_{w_\delta \in X_\delta^\circ} \|S_2 - w_\delta\|_\circ \leq N_\ell^{-8} (\log N_\ell)^{\frac{3}{2}}. \tag{2.5.35}$$

Pour le cas $\omega_j = \frac{3\pi}{2}, q = 0$, on obtient

$$\inf_{w_\delta \in X_\delta^\circ} \|S_2 - w_\delta\|_\circ \leq N_\ell^{-\frac{8}{3}} (\log N_\ell)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5.36}$$

On a aussi d'après (1.6.22) $\sup(|\lambda|, |\mu|) \leq c \|f\|_{H_1^{s-1}(\Omega)}$ pour $s > 2$.

Enfin le résultat est déduit en combinant les propositions 2.5.3 et les inégalités (2.5.34), (2.5.35) et (2.5.36). ■

2.5.3 Algorithme de Strang et Fix : cas général

Comme pour le cas axisymétrique, on considère l'espace $\ddot{X}_\delta = X_\delta^\circ + \mathbb{R}S_1$, on écrit alors pour u_δ^k et $v_\delta^k \in \ddot{X}_\delta$:

$$\begin{aligned} \mathring{u}_\delta^k &= u_\delta^k + \lambda S_1. \\ \mathring{v}_\delta &= v_\delta + \mu S_1. \end{aligned}$$

Remarque 2.5.5 *La première singularité est indépendante de k, et la singularité S_1 est la même que celle du cas axisymétrique.*

On définit la forme bilinéaire discrète sur $\ddot{X}_\delta$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{u}_\delta^k, \mathring{v}_\delta\right) &= a_{k,\delta}\left(u_\delta^k, v_\delta\right) \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L} (\lambda \int_{\Omega_\ell} \nabla S_1 \nabla v_\ell r dr dz + \mu \int_{\Omega_\ell} \nabla u_\ell^k \nabla S_1 r dr dz \\ &+ \lambda\mu \int_{\Omega_\ell} (\nabla S_1^2) r dr dz + \lambda k^2 \int_{\Omega_\ell} (S_1 v_\ell) r^{-1} dr dz \\ &+ \mu k^2 \int_{\Omega_\ell} (S_1 u_\ell^k) r^{-1} dr dz + \lambda\mu k^2 \int_{\Omega_\ell} (S_1^2) r^{-1} dr dz). \end{aligned} \tag{2.5.37}$$

Le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathring{u}_\delta \in \ddot{X}_\delta \text{ vérifiant :} \\ \forall \mathring{v}_\delta \in \ddot{X}_\delta,\ \mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{u}_\delta^k, \mathring{v}_\delta\right) = \left(f^k, \mathring{v}_\delta\right)_\delta \end{array} \right. \tag{2.5.38}$$

On définit les normes

$$\|\mathring{v}_\delta\|_{\circ k} = \sum_{\ell=1}^{L}(\left\|v_{\delta|\Omega_\ell}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} + |\lambda|^2 \left\|S_{1|\Omega_\ell}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$$

et (2.5.39)

$$\|\mathring{v}_\delta\|_{\circ k1} = (\sum_{\ell=1}^{L}\left\|\mathring{v}_{\delta|\Omega_\ell}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$$

Remarque 2.5.6 *On remarque que*

$$\|.\|_{\circ k1} \leq c\,\|.\|_{\circ k} \tag{2.5.40}$$

où la constante c est indépendante de k.

Proposition 2.5.5 *Il existe une constante γ positive et indépendante de δ telle que :*

$$\begin{aligned} \forall \mathring{u}^k_\delta &\in \ddot{X}_\delta, \forall \mathring{v}_\delta \in \ddot{X}_\delta & (2.5.41)\\ \mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{u}^k_\delta, \mathring{v}_\delta\right) &\leq \gamma \left\|\mathring{u}^k_\delta\right\|_{\circ k}\|\mathring{v}_\delta\|_{\circ k} & (2.5.42)\end{aligned}$$

Preuve On remarque que

$$\begin{aligned} \lambda\int_{\Omega_\ell}\nabla S_1\nabla v_\ell r dr dz + \lambda k^2\int_{\Omega_\ell}(S_1 v_\ell) r^{-1} dr dz &\leq |\lambda|\,(|S_1|_{H^1_1(\Omega_\ell)}\,|v_\ell|_{H^1_1(\Omega_\ell)}\\ &\quad + k^2\,\|S_1\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}\,\|v_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)})\\ &\leq |\lambda|\,(|S_1|_{H^1_1(\Omega_\ell)} + k\,\|S_1\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)})\\ &\quad (|v_\ell|_{H^1_1(\Omega_\ell)} + k\,\|v_\ell\|_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}).\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité $(a+b) \leq \sqrt{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ pour conclure que

$$\lambda\int_{\Omega_\ell}\nabla S_1\nabla v_\ell r dr dz + \lambda k^2\int_{\Omega_\ell}(S_1 v_\ell) r^{-1} dr dz \leq |\lambda|\ ||S_1||\ _{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}||v_\ell||_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}.$$

On a en plus

$$\lambda\mu\int_{\Omega_\ell}(\nabla S_1^2) r dr dz + \lambda\mu k^2\int_{\Omega_\ell}(S_1^2) r^{-1} dr dz) \leq |\lambda\mu|\ ||S_1||^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} a_{k,\delta}\left(u_\delta^k, v_\delta\right) &\leq c\sum_{\ell=1}^{L}(|u_\ell^k|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\left\|u_\ell^k\right\|_{L_{-1}^2(\Omega_\ell)}) \\ &\quad (|v_\ell|_{H_1^1(\Omega_\ell)} + k\left\|v_\ell\right\|_{L_{-1}^2(\Omega_\ell)}) \\ &\leq c'\sum_{\ell=1}^{L}||u_\ell^k||_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}||v_\ell||_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} . \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{u}_\delta^k, \mathring{v}_\delta\right) &\leq C\sum_{\ell=1}^{L}(||u_\ell^k||_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} + |\lambda|||S_1||_{\ H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}) \\ &\quad (||v_\ell||_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} + |\mu|\ ||S_1||_{\ H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}) \\ &\leq c\sum_{\ell=1}^{L}(||u_\ell^k||_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} + |\lambda|||S_1||_{\ H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}) \\ &\quad \sum_{\ell=1}^{L}(||v_\ell||_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} + |\mu|\ ||S_1||_{\ H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}). \end{aligned}$$

Enfin on obtient

$$\begin{aligned} \mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{u}_\delta^k, \mathring{v}_\delta\right) &\leq C(L)\{\sum_{\ell=1}^{L}\left(||u_\ell^k||^2_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} + |\lambda|^2||S_1||^2_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}\right)^{\frac{1}{2}}\} \\ &\qquad \{\left(||v_\ell||^2_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)} + |\mu|^2||S_1||^2_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}\right)^{\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

et (2.5.41) est vérifiée. ■

Proposition 2.5.6 *Il existe une constante β positive telle que :*

$$\forall \mathring{u}_\delta \in \ddot{X}_\delta(\Omega), \quad \mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{u}_\delta, \mathring{u}_\delta\right) \geq \beta\left\|\mathring{u}_\delta\right\|_{\circ k}^2 . \tag{2.5.43}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \mathring{a}_{k,\delta}\left(u_\delta^k + \lambda S_1, u_\delta^k + \lambda S_1\right) &= \mathring{a}_\delta\left(u_\delta^k + \lambda S_1, u_\delta^k + \lambda S_1\right) \\ &\quad + k^2[(\frac{u_\delta^k}{r}, \frac{u_\delta^k}{r})_\delta \\ &\quad + 2\lambda\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}(S_1 u_\delta^k)r^{-1}drdz \\ &\quad + \lambda^2\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}(S_1^2)r^{-1}drdz]. \end{aligned}$$

On utilise le lemme 2.5.1 pour déduire que

$$\mathring{a}_\delta\left(u_\delta^k+\lambda S_1, u_\delta^k+\lambda S_1\right) \;\geq\; (1-\rho)\sum_{\ell=1}^{L}\left\|\nabla u_\ell^k\right\|^2_{L_1^2(\Omega_\ell)}+\lambda^2\left\|\nabla S_1\right\|^2_{L_1^2(\Omega_\ell)}]$$

et on applique ce même lemme 2.5.1 pour l'espace L^2_{-1} et le produit scalaire $(S,u_N)_{-1} = \int_\Omega (S\ u_N)r^{-1}drdz$ pour déduire que

$$k^2[(\frac{u_\delta^k}{r},\frac{u_\delta^k}{r})_\delta+2\lambda\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}(S_1u_\delta^k)r^{-1}drdz+\lambda^2\sum_{\ell=1}^{L}\int_{\Omega_\ell}(S_1^2)r^{-1}drdz]$$

est minorée par

$$(1-\rho')\sum_{\ell=1}^{L}[\left\|u_\ell^k\right\|^2_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}+\lambda^2\left\|S_1\right\|^2_{L^2_{-1}(\Omega_\ell)}]\text{ (puisque }\ |k|\geq 1)$$

Comme $\|.\|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)}$ et $|.|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)}$ sont équivalentes on conclut en écrivant :

$$\begin{aligned}\mathring{a}_{k,\delta}\left(u_\delta^k+\lambda S_1, u_\delta^k+\alpha\lambda S_1\right) \;&\geq\; c\sum_{\ell=1}^{L}[\left\|u_\ell^k\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}\\ &\quad+\lambda^2\left\|S_1\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)}].\end{aligned}$$

où la constante c ne dépend pas de k. ■

La continuité et coercivité de $\mathring{a}_{k,\delta}$ sur $\ddot{X}_\delta\times\ddot{X}_\delta$ vont nous permettre d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 2.5.5 *Pour toute fonction f^k appartenant à $L_1^2(\Omega)$, le problème (2.5.38) admet une solution unique $\mathring{u}_\delta^k$ dans $\ddot{X}_\delta$ vérifiant :*

$$\left\|\mathring{u}_\delta^k\right\|_{\circ k}\leq C\left\|f^k\right\|_{L_1^2(\Omega)}.$$

2.5.4 Estimation d'erreurs

Proposition 2.5.7 *Soit u^k la solution du problème continu (2.4.5) et $\mathring{u}_\delta^k$ la solution du problème discret (2.5.38), on a alors :*

$$\begin{aligned}\left\|u^k - \mathring{u}_\delta^k\right\|_{\circ k} \leq\ & C(\inf_{\mathring{v}_\delta \in \ddot{X}_\delta} \{\left\|u^k - \mathring{v}_\delta\right\|_{\circ k} + \\ & \sup_{\mathring{w}_\delta \in \ddot{X}_\delta} \frac{\mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right) - \mathring{a}_k(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta)}{\left\|\mathring{w}_\delta\right\|_{\circ k}}\} \\ & + \sup_{\mathring{w}_\delta \in \ddot{X}_\delta} \frac{\int_{\Omega_k} f^k\ \mathring{w}_\delta dxdy - \left(\mathcal{I}_\delta f^k, \mathring{w}_\delta\right)_\delta}{\left\|\mathring{w}_\delta\right\|_{\circ k}} \\ & + \sup_{\mathring{w}_\delta \in \ddot{X}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \left(\frac{\partial u^k}{\partial n_m}\right) [\mathring{w}_\delta] d\tau}{\left\|\mathring{w}_\delta\right\|_{\circ k}}).\end{aligned}$$

Preuve C'est la même démarche que dans la preuve de la proposition 2.4.3. ■

Théorème 2.5.6 *Soit u^k la solution du problème continu (2.4.5) et $\mathring{u}_\delta^k$ la solution du problème discret (2.5.38). On suppose que $f^k \in H_-^{s-1}(\Omega)$ avec $s > \frac{7}{2}$ alors on a*

$$\left\|u^k - \mathring{u}_\delta^k\right\|_{\circ k} \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta\} \left\|f^k\right\|_{H_1^{s-1}(\Omega)},$$

où

$$N_\delta = \min\left\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\right\} \text{ et } \mathring{E}_\delta = \max\left\{\mathring{E}_\ell, 1 \leq \ell \leq L\right\}$$

et $\mathring{E}_\ell$ est défini dans (2.5.33).

Preuve La démarche est similaire à celle de la proposition 2.5.4. Il suffit de remarquer d'abord que le terme $\mathring{a}_{k,\delta}\left(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta\right) - \mathring{a}_k(\mathring{v}_\delta, \mathring{w}_\delta) = a_{k,\delta}\left(v_\delta, w_\delta\right) - a_k(v_\delta, w_\delta)$ qui est déjà majoré dans la preuve de la proposition (2.4.3). Ensuite on a :

$$\inf_{\mathring{w}_\delta \in \ddot{X}_\delta} \left\|u^k - \mathring{v}_\delta\right\|_{\circ k} \leq c(\inf_{z_\delta \in \ddot{X}_\delta} \left\|u_{reg}^k - z_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + \inf_{w_\delta \in \ddot{X}_\delta} |\lambda| \left\|S_2 - w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + \inf_{w_\delta \in \ddot{X}_\delta} |\mu| \left\|S_3 - w_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + ...)$$

où on a posé $u^k = u_{reg}^k + \lambda S_1 + \mu S_2$ et $\mathring{v}_\delta = z_\delta + \lambda S_1 + \mu w_\delta$. Le premier terme est inférieur à

$$C\lambda_\delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\|u_{\delta|\Omega_\ell}^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}.$$

Pour le deuxième on utilise la remarque 2.5.5 et l'inégalité (2.4.7), on obtient alors le résultat. ■

2.5.5 Retour au problème tridimentionnel : Algorithme de Strang et Fix

On pose

$$\mathring{u}_{K,\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} \mathring{u}^k_\delta\,(r,z)\, e^{ik\theta}$$

où

1) $\mathring{u}^0_\delta\,(r,z)$ est solution du problème (2.5.22) pour des données f^0 et g^0,

2) $\mathring{u}^k_\delta\,(r,z)$, $(k \neq 0)$ est solution du problème (2.5.38) pour des données f^k et g^k.

Et on pose

$$\mathring{u}^*_{K,\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} \mathring{u}^k_{K,\delta}\,(r,z)\, e^{ik\theta}$$

avec

1) $\mathring{u}^0_{K,\delta}\,(r,z)$ est solution du problème (2.5.22) pour des données f^0_K et g^0_K.

2) $\mathring{u}^k_{K,\delta}\,(r,z)$, $(k \neq 0)$ est solution du problème (2.5.38) pour des données f^k_K et g^k_K.On définit $\mathring{u}^*_{K,\delta}$ par

$$\mathring{u}^*_{K,\delta}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|\leq K} \mathring{u}^k_{K,\delta}\,(r,z)\, e^{ik\theta}, \tag{2.5.44}$$

Théorème 2.5.7 *Soit $\breve{f}$ dans $H^{s-1}(\breve{\Omega})$, $s > \frac{5}{2}$ et $\breve{u}$ la solution du problème (1.6.9) on a :*

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \mathring{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta) + K^{-s}\} \left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} \tag{2.5.45}$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{u} - \mathring{u}^*_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta) + K^{1-s}\} \left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} \tag{2.5.46}$$

où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \;\; et \; \mathring{E}_\delta = \max\left\{\mathring{E}_\ell, 1 \leq \ell \leq L\right\}$$

et $\mathring{E}_\ell$ est défini dans (2.5.33).

Preuve 1) On a

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \mathring{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} &\leq (\|\breve{u} - \breve{u}_K\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} + \|\breve{u}_K - \mathring{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}) \\ &\leq c\{K^{-s}\|\breve{u}\|_{H^{s+1}(\breve{\Omega})} + \sum_{|k|\leq K} \left\|u^k - \mathring{u}^k_\delta\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega)}\}.\end{aligned}$$

Graçe à l'inégalité (2.5.5) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \mathring{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c\{K^{-s}\left\|\breve{f}\right\|_{H^{s-1}(\breve{\Omega})} + \sum_{|k|\leq K} \left\|u^k - \mathring{u}^k_\delta\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega)}\}.$$

a) Pour $k \neq 0$ et d'après le théorème 2.5.6, on a

$$\left\|u^k - \mathring{u}^k_\delta\right\|_{\circ k} \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta\} \left\|f^k\right\|_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)}.$$

On a en plus d'après (2.5.40)

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0} \left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|_{\circ k1} &\leq \sum_{k\neq 0} \left\|u^k - \mathring{u}^k_\delta\right\|_{\circ k} \\ &\leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta\} \sum_{k\neq 0} \left\|f^k\right\|_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)}\end{aligned}$$

où $\left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|_{\circ k1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$.

b) Pour $k = 0$ et d'après le théorème 2.5.6, on a

$$\left\|u^0 - \mathring{u}^0_\delta\right\|_{\circ} \leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta\} \left\|f^0\right\|_{H^{s-1}_{(k)}(\Omega)}.$$

On a en plus d'après (2.5.23)

$$\begin{aligned}\left\|\mathring{u}^0_\delta - \mathring{u}^0_{K,\delta}\right\|_{\circ 1} &\leq \left\|u^0 - \mathring{u}^0_\delta\right\|_{\circ} \\ &\leq C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \mathring{E}_\delta\} \left\|f^0\right\|_{H^{s-1}_1(\Omega)}\end{aligned}$$

où $\left\|\mathring{u}^0_\delta - \mathring{u}^0_{K,\delta}\right\|_{\circ 1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^0_\delta - \mathring{u}^0_{K,\delta}\right\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$. En combinant a) et b) et en utilisant l'équvalence des normes

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\sum_{\ell=1}^{L} \|.\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}} \simeq \|.\|_{H^1(\breve{\Omega})}$$

et le fait que $\|.\|_{H^1_{(0)}(\Omega_\ell)} = \|.\|_{H^1_1(\Omega_\ell)}$ on obtient (2.5.45)

2) On a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{u} - \mathring{u}^*_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq \sum_{\ell=1}^{L}(\|\breve{u} - \mathring{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} + \left\|\mathring{u}^*_{K,\delta} - \mathring{u}_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}) \tag{2.5.47}$$

Le premier terme $\sum\limits_{\ell=1}^{L} \|\breve{u} - \mathring{u}_{K,\delta}\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}$ est déjà majoré.

Pour le second terme $\sum\limits_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^*_{K,\delta} - \mathring{u}_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)}$ on procède comme suit.

a) Pour $k \neq 0$, on utilise l'ellipticité et la continuité de $\mathring{a}_{k,\delta}(.,.)$ pour la norme $\|.\|_{\circ k}$. Et on obtient

$$\left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|_{\circ k} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^k - f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)}$$

On a en plus d'après (2.5.40)

$$\left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|_{\circ k1} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^k - f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)}$$

où

$$\left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|_{\circ k1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}},$$

ceci entraine que

$$\sum_{k\neq 0} \left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|_{\circ k1} \leq c\sum_{k\neq 0}\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^k - f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \tag{2.5.48}$$

b) Pour $k = 0$ on utilise l'ellipticité et la continuité de $\mathring{a}_\delta(.,.)$ pour la norme $\|.\|_\circ$. On obtient :

$$\sum_{k\neq 0} \left\|\mathring{u}^0_\delta - \mathring{u}^0_{K,\delta}\right\|_{\circ} \leq c\sum_{k\neq 0}\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^0 - f^0_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)}$$

On a en plus d'après (2.5.23)

$$\sum_{k\neq 0} \left\|\mathring{u}^0_\delta - \mathring{u}^0_{K,\delta}\right\|_{\circ 1} \leq c\sum_{k\neq 0}\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^0 - f^0_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)}$$

où $\left\|\mathring{u}^0_\delta - \mathring{u}^0_{K,\delta}\right\|_{\circ 1} = (\sum\limits_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^k_\delta - \mathring{u}^k_{K,\delta}\right\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}$. En combinant a) et b) et en utilisant l'équivalence des normes

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\sum_{\ell=1}^{L} \|.\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}} \simeq \|.\|_{H^1(\breve{\Omega})}$$

et le fait que $\|.\|_{H^1_{(0)}(\Omega_\ell)} = \|.\|_{H^1_1(\Omega_\ell)}$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^*_{K,\delta} - \mathring{u}_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq \sum_{k\neq 0}\sum_{\ell=1}^{L} ||\mathcal{I}_\delta(f^k - f^k_K)||_{L^2_1(\Omega_\ell)}.$$

Enfin on utilise la même démarche que dans 2) de la preuve du théorème 2.5.1, on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\mathring{u}^*_{K,\delta} - \mathring{u}_{K,\delta}\right\|_{H^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(K^{1-s} + N_\delta^{1-s})||\breve{f}||_{H^{s-1}(\breve{\Omega})}. \tag{2.5.49}$$

Finalement en combinant (2.5.45), (2.5.47) et (2.5.49) on obtient (2.5.46). ■

2.6 Mise en œuvre de l'Algorithme de résolution

2.6.1 Description du système linèaire

2.6.1.1 Cas de $\Omega = [a, b] \times [c, d]$

On rappelle les nœuds Gauss-Lobatto mensionnés dans le début de ce chapitre. $r_i^{(2)} = \frac{1+\zeta_i^{(2)}}{2}$ où $1 \leq i \leq N+1$ et $\xi_j, 0 \leq j \leq N$.

On va décrire la matrice du système linéaire dans le cas d'un cylindre c'est à dire où Ω est un rectangle $[a, b]\times[c, d]$. Le maillage est fait sur un carré de référence Σ. On note Σ l'ensemble des nœuds du maillage sur Σ. I l'ensemble des indices des nœuds $(r_i^{(2)}, \xi_j)$ de Σ tels que $(r_i^{(2)}, \xi_j) \in \Sigma \cap (\Omega \cup \Gamma_0)$. I^* l'ensemble des indices des nœuds de Σ tels que $(r_i^{(2)}, \xi_j) \in \Sigma \cap \Omega$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des indices des nœuds $(r_i^{(2)}, \xi_j)$ de Σ tels que $(r_i^{(2)}, \xi_j) \in \Sigma \cap \bar{\Gamma}$.

Pour $k = 0$, le vecteur inconnu est $U^0_\delta = (u^0_{\delta,ij})$, $(i, j) \in I$ et pour $k \neq 0$, le vecteur inconnu est $U^k_\delta = (u^k_{\delta,ij})$, $(i, j) \in I^*$ puisque u^k est nul sur Γ_0.

Pour retrouver le maillage (ζ'_i, ξ'_j), ainsi que les poids d'intégration ρ'_j et ω'_i sur chaque $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, à partir des nœuds et poids donnés sur le carré de référence Σ, on utilise les formules de changement de variables classiques :

$$\zeta'_i = \frac{b-a}{2}\zeta_i + \frac{b+a}{2} \text{ et } \xi_j = \frac{d-c}{2}\xi'_j + \frac{d+c}{2},$$

et

$$\rho'_j = \frac{d-c}{2}\rho_j \text{ et } \omega'_i = (\frac{b-a}{2})^2\omega_i.$$

On introduit ensuite les polynômes de Lagrange, associés respectivement aux nœuds $(\zeta_i)_{i=1,\ldots,N+1}$ et $(\xi_j)_{j=1,\ldots,N}$ définis par

$$l_i^{(2)}(\zeta_k) = \delta_{ik} \text{ et } l_j(\xi_k) = \delta_{jk},$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. Les polynômes $\{l_i^{(2)} \otimes l_j,\ 1 \leq i \leq N+1 \ et\ 0 \leq j \leq N\}$ forment une base de $\mathbb{P}_N(\Sigma)$. Donc, tout polynôme $u_N \in \mathbb{P}_N(\Sigma)$ peut s'écrire dans cette base sous la forme

$$u_N(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=0}^{N} u_{ij} l_i^{(2)}(\zeta) l_j(z), \text{ où } u_{ij} = u_{ij}(\zeta_i, \xi_j).$$

Les problèmes (2.3.11) et (2.4.6) s'écrivent alors sous la forme d'une famille de systèmes linéaires :

$$A_0 U_0 = F_0 \text{ et } A_k U_k = F_k \text{ pour } k \neq 0,\ |k| \ \leq K,$$

où l'inconnu $U_0 = (u_{ij}^0)_{(i,j)\in I}$ est le vecteur associé à la vitesse pour $k = 0$, et $U^k = (u_{ij}^k)_{(i,j)\in I^*}$ est celui pour $k \neq 0$.

Les matrices A_0 et A_k sont données par :

$$A_0 = (a_N(l_i^{(2)} l_j, l_p^{(2)} l_q)), (i,j) \in I \text{ et } (p,q) \in I,$$

et

$$A_k = (a_{k,N}(l_i^{(2)} l_j, l_p^{(2)} l_q)), (i,j) \in I^* \text{ et } (p,q) \in I^*.$$

où

$$\begin{aligned} a_{k,N}(l_i^{(2)} l_j, l_p^{(2)} l_q) \quad &= \quad \frac{d-c}{2}\delta_{qq'}\rho_q\beta_{pp'} + \frac{2}{d-c}(\frac{d-a}{2})^2\delta_{pp'}\omega_q\alpha_{qq'} \\ &\quad + k^2\frac{d-c}{2}\frac{\delta_{qq'}.\delta_{pp'}}{(1+\zeta_p)^2}\omega_p\rho_q, \end{aligned}$$

(Voir Annexe 1), pour les détails.

Les vecteurs $F_k^* = (F_{k,p,q}^*)$, $(p,q) \in I^*$ $(resp\ (p,q) \in I\ si\ k = 0)$, sont donnés par

$$F^*_{k,p,q} = (\tfrac{b-a}{2})^2(\tfrac{d-c}{2}) f^k_{K,p,q}\omega_p\rho_q - \sum_{(i,j)\in\mathcal{B}} g^k_{K,i,j} a_{k,N}(l_i^{(2)}l_j, l_p^{(2)}l_q),$$

avec

$$f^k_K\ (\zeta_p,\xi_q) = f^k_{K,p,q} = \tfrac{\sqrt{2\pi}}{2K+1}\sum_{|\ell|\le K}\breve{f}(\zeta_p,\theta_\ell,\xi_q)e^{-ik\theta_\ell},$$

et

$$g^k_K\ (\zeta_p,\xi_q) = g^k_{K,p,q} = \tfrac{\sqrt{2\pi}}{2K+1}\sum_{|\ell|\le K}\breve{g}(\zeta_p,\theta_\ell,\xi_q)e^{-ik\theta_\ell} \text{ où } \theta_\ell = \tfrac{2l\pi}{2K+1}.$$

2.6.1.2 *Cas d'un domaine décomposé* $\Omega = \bigcup_{\ell=1}^{L}\Omega_\ell$

Le système globale est de la forme

$$A_kU_k = F_k \tag{2.6.1}$$

où U^k est constitué par les valeurs de u^k sur la grille des nœuds, privées de ceux existant sur la surface Γ. En pratique, on numérote les degrés de liberté de façon à disposer, dans l'ordre, les nœuds internes ($1 \le \ell \le L$, $(N_\ell - 1)^2$ points sur chaque Ω_ℓ), et puis les nœuds frontières (moins de $4(N_1 + N_2 + \cdots + N_L)$ points). On a

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{k,1} & 0 & \cdots & 0 & B_{k,1} \\ 0 & A_{k,2} & \cdots & 0 & B_{k,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{k,L} & B_{k,L} \\ C_{k,1} & C_{k,2} & \cdots & C_{k,L} & D_k \end{pmatrix} \tag{2.6.2}$$

Où $A_{k,\ell}$ représente la matrice qui agit sur les nœuds internes pour chaque Ω_ℓ.

$B_{k,\ell}$ et $C_{k,\ell}$ et D_k représentent les matrices qui agissent sur la squelette $\mathcal{S}$.

2.6.2 La matrice des joints

On note Q la matrice qui traduit la condition de transmission aux interfaces des sous-domaines. Elle permet de purger le vecteur des inconnues des faux degrés de liberté (les nœuds esclaves). Le calcul de cette matrice est purement local pour chaque paire de côtés. Le calcul des valeurs de v_δ aux nœuds spectraux d'une arête $\Gamma^\ell, 1 \leq k \leq K$, $1 \leq \ell \leq 4$, ne dépend que de la connaissance de ϕ/γ^m(voir annexe 2). Pour pouvoir exprimer le système approché total sous forme matricielle (bien qu'elle ne soit jamais explicitement construite), on introduit une matrice de couplage global. Celle ci appliquée au vecteur des degrés d

e liberté nous donne le vecteur des inconnues admissibles.

Notons que le système linéaire (2.6.1) est à matrice A^k symétrique définie positive. On le résout par un algorithme de gradient conjugué. Mais on ne résout pas le système (2.6.1) parce qu'il comporte de faux degrés de liberté qui sont les valeurs de la solution aux nœuds dits esclaves. Ces noeuds sont éliminés par l'action de la matrice Q^T. Le système global qu'on résout est alors :

$$(Q^T A_k Q)\tilde{u}^k = Q^T F_k. \tag{2.6.3}$$

2.6.3 Mise en œuvre de l'Algorithme de Strang et Fix

Le problème $\mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_\delta, \mathring{v}_\delta\right) = \left(\mathcal{I}_\delta f, \mathring{v}_\delta\right)_\delta$ s'écrit sous forme matricielle

$$\mathring{A}\mathring{U}_\delta = F \tag{2.6.4}$$

La matrice $\mathring{A}$ a la forme suivante :.

$$\mathring{A} = \begin{pmatrix} A & K \\ M & J \end{pmatrix}$$

où la matrice A est décrite dans (2.6.2 pour $k = 0$),

La matrice K est formée d'éléments $\chi_\ell \int_{\Omega_\ell} \nabla S_1 \nabla l_{i'}^{(2)} l_{j'}\ d\tau$, où $\chi_\ell = 1$ si la singularité est contenu dans Ω_ℓ et 0 sinon. La matrice M est formé d'éléments $\chi_\ell \int_{\Omega_\ell} \nabla S_1 \nabla l_i^{(2)} l_j$ $d\tau$ et enfin la matrice J est l'élément $\int_{\Omega_\ell} \left(\nabla S_1\right)^2\ d\tau$, voir [31, Chapitre III].

2.7 *Résultats numériques*

Dans cette section, on va présenter des testes numériques qui confirmeraient nos prédictions théoriques dans les cas axisymétrique et général. Ces tests seront faits sur trois types de domaines convexes ou non Ω^a, Ω^b, Ω^c. chacun des domaines est décomposé en sous domaines convexes ce qui nous permettra de mettre en évidence la convergence de la méthode des joints.

2.7.1 Cas axisymétrique

2.7.1.1 Domaine convexe Ω^a :

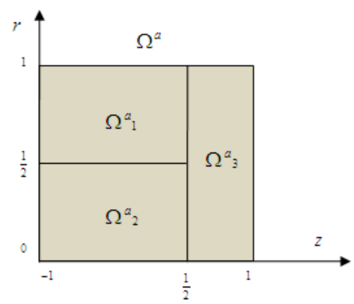

Fig. 2.7.1: Domaine Ω^a

On considère le carré de la figure (2.7.1), décomposé en trois sous domaines Ω_1^a, Ω_2^a, Ω_3^a.

Pour une première série de tests, on suppose que :

$$\begin{cases} f = 0 \quad \text{dans } \Omega^a \\ g = \begin{cases} r^{5/2} & \text{si } z = \pm 1 \\ r & \text{si } r = 1. \end{cases} \end{cases}$$

On présente dans la figure 2.7.2 d'une part le tracé de u dans les parties Ω_1^a avec $N = 24$, resp Ω_2^a avec $N = 28$ et Ω_3^a avec $N = 24$ ensemble. Et d'autre part le tracé de la solution u obtenue de manière globale sans décomposition de domaines.

La figure 2.7.3 représente les isovaleurs de la solution u avec $N = 24$ dans les trois sous domaines.

La figure 2.7.4 représente un agrandissement de la partie encerclée de la fig 2.7.2.

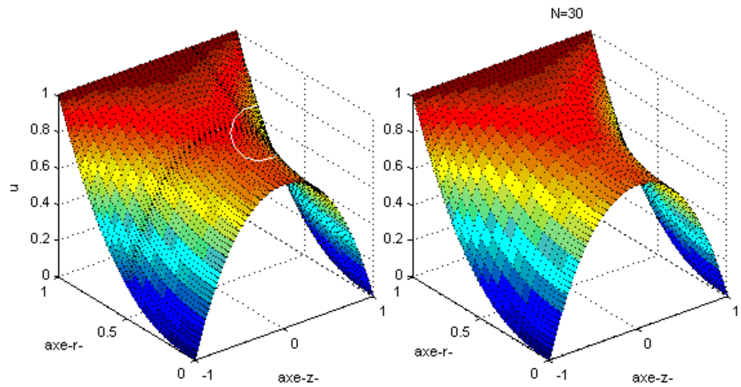

Fig. 2.7.2: Tracé de la fonction u avec et sans décomposition de domaine

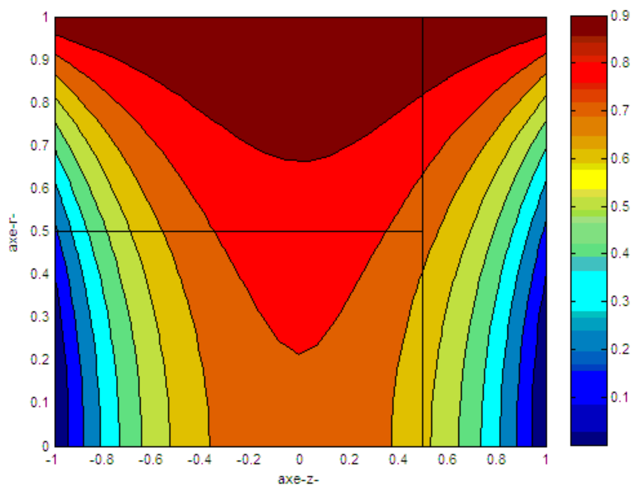

Fig. 2.7.3: Domaine Ω^a : isovaleurs de u pour $N = 24$.

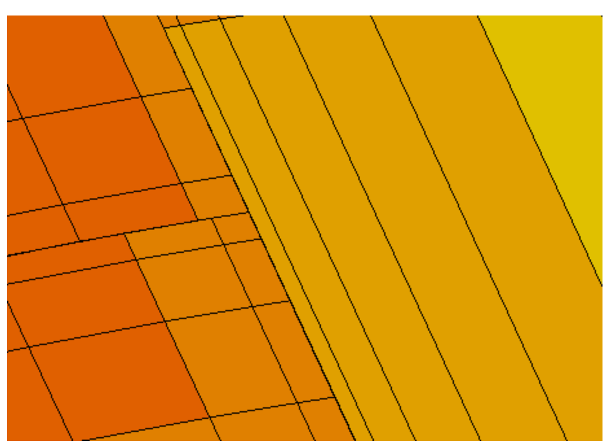

Fig. 2.7.4: Domaine Ω^a : agrandissement de la partie de raccord

Commentaire : pour ce premier cas on remarque que pour N assez grand les trois parties dans la figure 2.7.4 collent parfaitement et que les lignes des isovaleurs dans la figure 2.7.3 sont continues à travers les interfaces.

2.7.1.2 Domaine non convexe Ω^b :

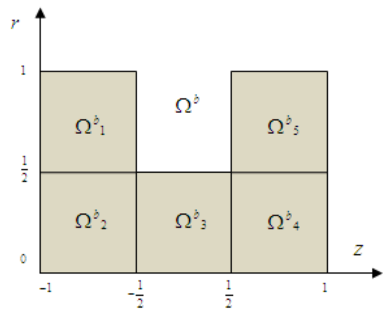

Fig. 2.7.5: Domaine Ω^b

On considère maintenant le domaine de la figure 2.7.5 décomposé en 5 sous domaines :

Dans un premier test, on considère les fonctions f et g données par :

$$\begin{cases} f = r^{1/2}(z^2 + \frac{8}{25}r^2 - 1) \quad \text{dans } \Omega^b \\ g = \begin{cases} 0 & \text{si } z = \pm 1 \\ \frac{4}{25}r^{5/2}(1-z^2) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On présente dans la figure 2.7.6 le tracé de u dans les parties Ω_1^b avec $N = 24$, Ω_2^b avec $N = 28$, Ω_3^b avec $N = 24$, Ω_4^b avec $N = 24$, et Ω_5^b avec $N = 24$ ensemble.

Ensuite on représente dans la figure 2.7.7, les isovaleurs de u avec $N = 24$.

Enfin l'agrandissement de la partie encerclée de la figure 2.7.6 est présenté sur la figure 2.7.8.

On fait un second test, avec :

$$\begin{cases} f = r^{1/2}z \text{ dans } \Omega^b \\ g = 0 \text{ sur le bord } \partial\Omega^b \end{cases}$$

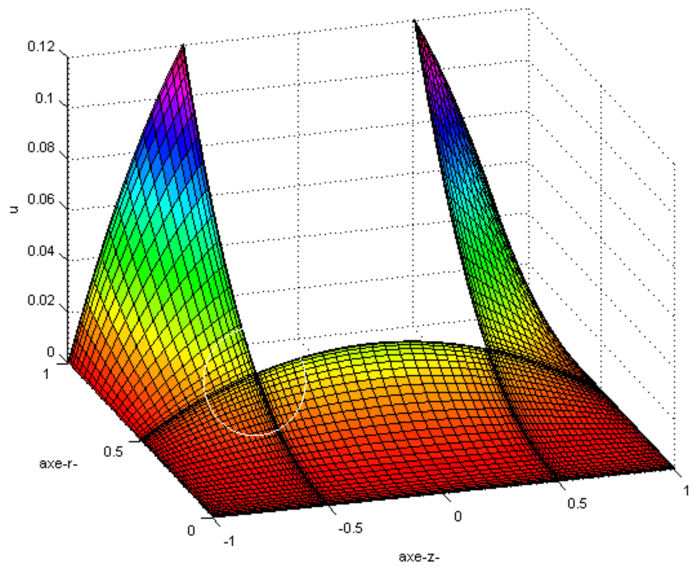

Fig. 2.7.6: Domaine Ω^b : tracé de la fonction u

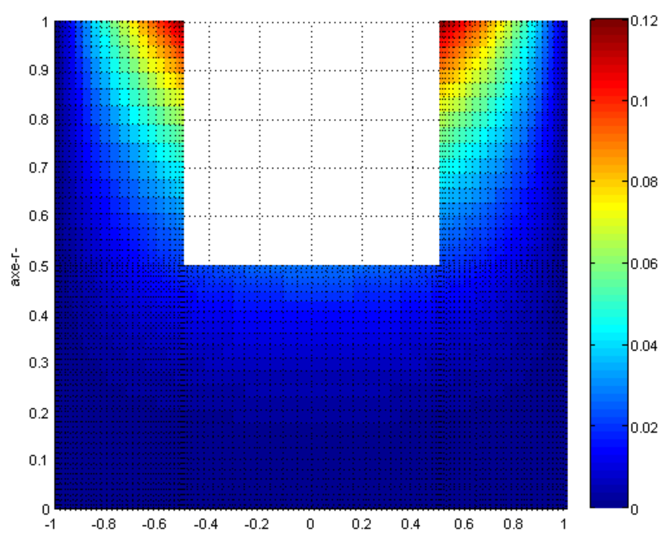

Fig. 2.7.7: Isovaleurs de la courbe u

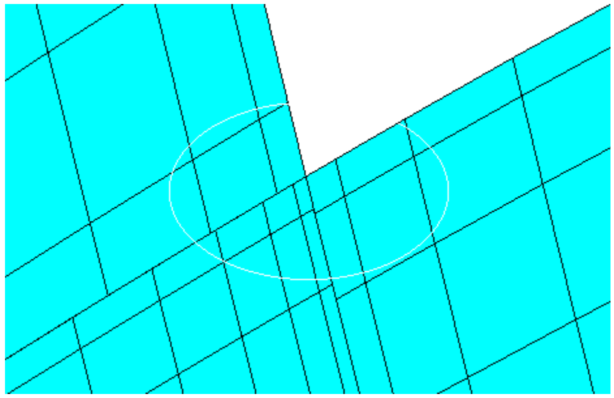

Fig. 2.7.8: Domaine Ω^b : agrandissement de la partie de raccord

On présente dans la figure 2.7.9 le tracé de u dans les parties Ω_1^b avec $N = 28$, Ω_2^b avec $N = 30$, Ω_3^b avec $N = 30$, Ω_4^b avec $N = 30$, et Ω_5^b avec $N = 24$ ensemble.

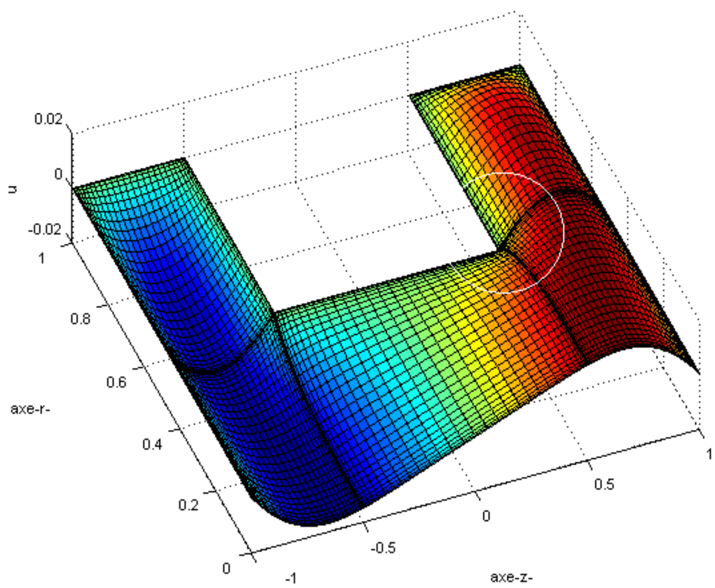

Fig. 2.7.9: Domaine Ω^b : tracé de la fonction u

Ensuite on représente dans la figure 2.7.10, les isovaleurs de u avec $N = 28$ sur les 5 sous domaines.

et l'agrandissement de la partie encerclée de la figure 2.7.9 sur la figure 2.7.11.

Commentaire des deux cas : on remarque que tant qu'on choisit les N_i dans

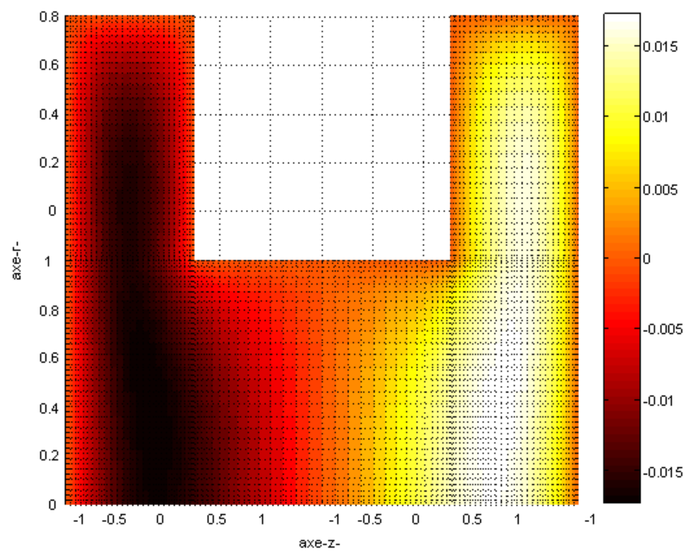

Fig. 2.7.10: Isovaleurs de u avec ($N = 28$).

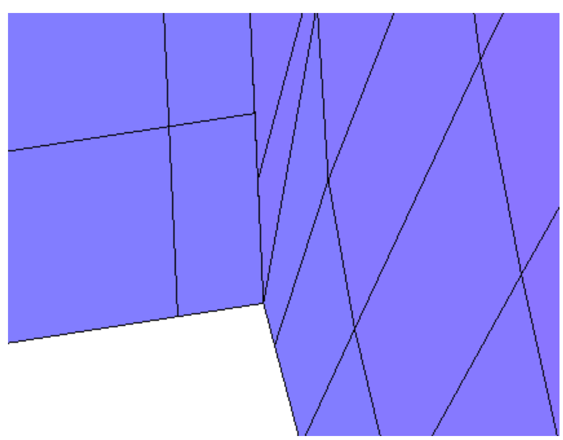

Fig. 2.7.11: Domaine Ω^b : agrandissement de la partie de raccord

chaque domaine de telle sorte, que λ_δ défini dans (2.3.25) ne soit pas grand alors les tracés dans les différentes parties du domaine collent parfaitement et les figures 2.7.9 et 2.7.10 montrent la continuité dans la répartition des couleurs à travers les interfaces.

2.7.1.3 Domaine non convexe Ω^c

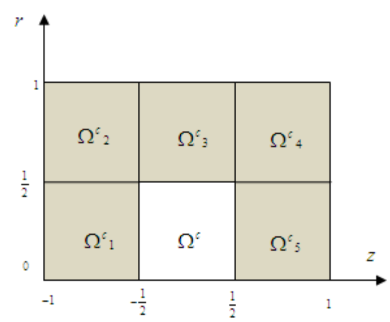

Fig. 2.7.12: Domaine Ω^c

On considère le domaine non convexe de la figure 2.7.12 décomposé en cinq sous domaines Ω^c_1– Ω^c_5. On considère les fonctions f et g suivantes :

$$\begin{cases} f = r^{1/3}(r - 0.245)z \text{ dans } \Omega^c \\ g = \begin{cases} 0.045z & \text{si } r = 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On représente dans la figure 2.7.13 le tracé de u dans les parties Ω^c_1– Ω^c_5 avec $N = 24$ sur Ω^c_1, Ω^c_3 et Ω^c_5 et $N = 20$ sur Ω^c_2, Ω^c_4.

Dans la figure 2.7.14 on illustre les isovaleurs de u, avec $N = 24$ sur Ω^c_1, Ω^c_3 et Ω^c_5 et $N = 20$ sur Ω^c_2, Ω^c_4).

Commentaire : on remarque qu'on a choisi la fonction de bord g discontinue, et on obtient un bon résultat.

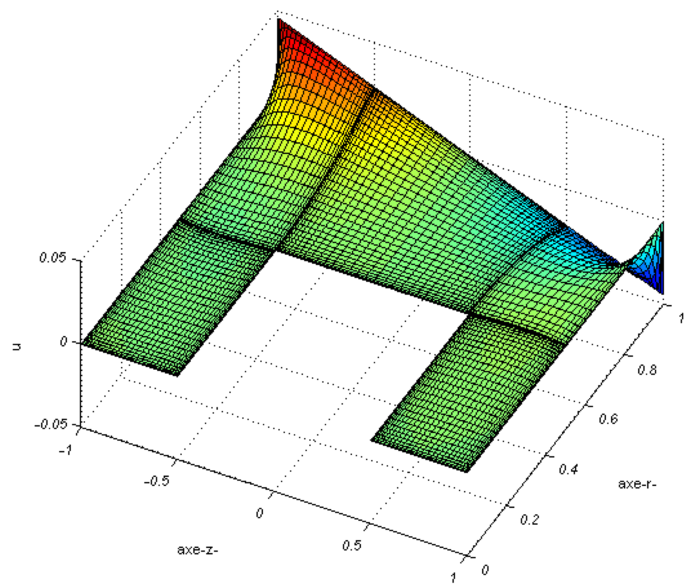

Fig. 2.7.13: Tracé de la fonction u

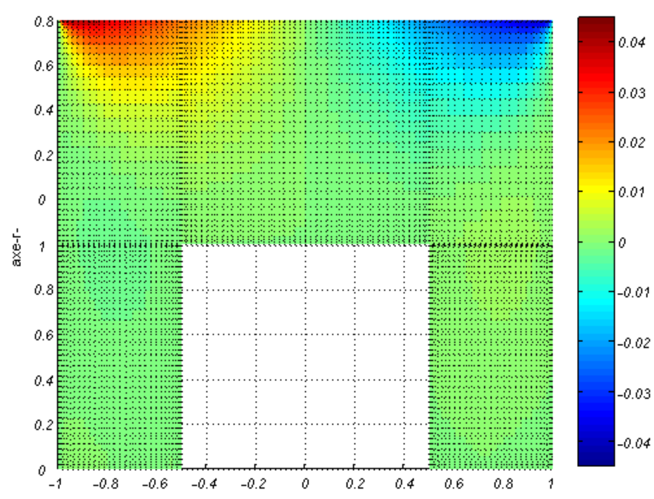

Fig. 2.7.14: Isovaleurs de u

2.7.1.4 Mesures de l'erreur

1) Soit la fonction singulière $u = r^{10/3}(z-1)$. Dans le tableau suivant, on mesure les erreurs

$\|u - u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega})}$, $\|u - u_\delta\|_{H^1(\cup\breve{\Omega}_\ell)}$ sur le domaine de référence $\breve{\Omega}$ sans décomposition.

N	*Norme* $L^2(\breve{\Omega})$	*Norme* $H^1(\cup\breve{\Omega}_\ell)$
8	1.478×10^{-6}	2.0354×10^{-5}
16	2.077×10^{-8}	4.0009×10^{-7}
24	1.568×10^{-9}	3.6931×10^{-8}
36	1.012×10^{-10}	2.8021×10^{-9}
48	1.568×10^{-11}	4.5421×10^{-10}

Dans la figure 2.7.15, on donne les courbes $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|u - u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega})}\right)$ et $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|u - u_\delta\|_{H^1(\cup\breve{\Omega}_\ell)}\right)$.

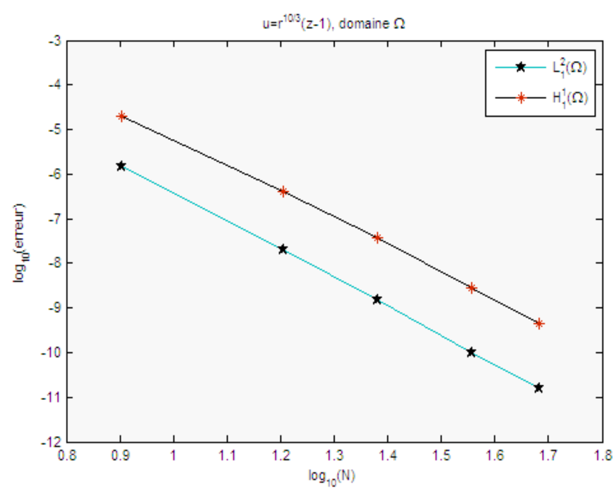

Fig. 2.7.15: Courbes d'erreur

Commentaire : On remarque que dès que N atteint 48 on a une erreur de u de l'ordre 10^{-11} en norme L^2 et de l'ordre de 4.10^{-10}, en effet la méthode spectrale est connue par sa précision.

Dans la figure 2.7.15, on remarque des droites, ceci est en accord avec les estimations (2.3.53) et (2.3.58).

2) Deuxième test : $u = r^{7/2}z$

on mesure dans le tableau suivant les erreurs

$\|u - u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega})}$, $\|u - u_\delta\|_{H^1(\cup\breve{\Omega}_\ell)}$ sur le domaine de référence $\breve{\Omega}$

N	$Norme\ L^2(\breve{\Omega})$	$Norme\ H^1(\cup\breve{\Omega}_\ell)$
8	$2,7348 \times 10^{-7}$	$5,667 \times 10^{-6}$
16	$3,1957 \times 10^{-9}$	$8,9067 \times 10^{-8}$
24	$2,1294 \times 10^{-10}$	$7,2774 \times 10^{-9}$
36	$1,3589 \times 10^{-11}$	$5,6555 \times 10^{-10}$
48	$1,9073 \times 10^{-12}$	$9,0036 \times 10^{-11}$

Ce tableau montre que le taux de convergence se comporte comme cN^{-7}, ce qui nous donne un doublement de l'ordre de convergence. Ce résultat est conforme aux prédictions théoriques (voir les estimations d'erreur : cas des fonctions singulières section 3.2.4).

On calcule les erreurs $\|u-u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}_i^a)}$ et $\|u-u_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}_i^a)}$ $(i=1,\cdots,3)$, sur le domaine $\breve{\Omega}^a$:

	sur Ω_1^a		sur Ω_2^a	
N	$L^2(\Omega_1^a)$	$H^1(\Omega_1^a)$	$L^2(\Omega_2^a)$	$H^1(\Omega_2^a)$
8	$9,0121\times10^{-8}$	$1,0331\times10^{-7}$	$1,2588\times10^{-7}$	$2,2035\times10^{-6}$
16	$5,3549\times10^{-10}$	$2,0154\times10^{-9}$	$1,1877\times10^{-9}$	$3,3670\times10^{-8}$
24	$7,0543\times10^{-12}$	$4,2049\times10^{-10}$	$7,7155\times10^{-11}$	$3,0130\times10^{-9}$
36	$5,1530\times10^{-13}$	$3,3548\times10^{-12}$	$7,5280\times10^{-13}$	$4,3511\times10^{-11}$
48	2.0130×10^{-14}	4.2030×10^{-13}	$1,0570\times10^{-13}$	$6,8820\times10^{-12}$

	sur Ω_3^a	
N	$L^2(\Omega_3^a)$	$H^1(\Omega_3^a)$
8	$2,0140\times10^{-7}$	$5,2191\times10^{-6}$
16	$2,3675\times10^{-9}$	$2,0346\times10^{-7}$
24	$7,0327\times10^{-11}$	$3,1247\times10^{-9}$
36	$4,1342\times10^{-12}$	$4,3644\times10^{-10}$
48	2.8920×10^{-13}	2.4516×10^{-11}

Commentaire : on donne les estimations sur chaque sous domaine, les estimations d'erreur dépendent aussi des dimensions de chaque domaine en plus de N.

2.7.2 Algorithme de Strang et Fix

On considère la fonction exacte $u=r^{2.1}z$ et on utilise l'algorithme de Strang et Fix sur le domaine Ω^b. On remarque alors une nette amélioration des erreurs sur les courbes $\left(\log_{10}(N),\log_{10}\|u-u_{\exp}\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}\right)$ et $\left(\log_{10}(N),\log_{10}\|u-u_{\exp}\|_{H^1(\breve{\Omega}^b)}\right)$, comme le montre les figures 2.7.16 et 2.7.17.

Cette nette amélioration, coincide bien avec les résultats théoriques prouvés dans le chapitre II

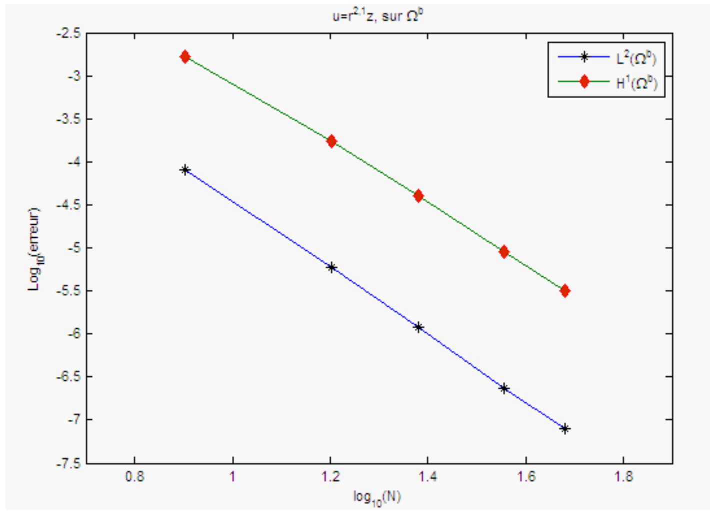

Fig. 2.7.16: Courbes d'erreur de u sans l'algorithme de Strang et Fix

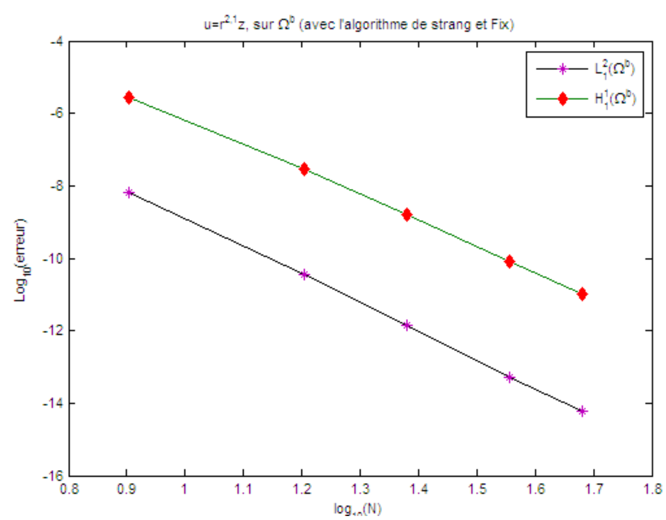

Fig. 2.7.17: Courbes d'erreur de u avec l'algorithme de Strang et Fix

2.7.3 Cas général

2.7.3.1 Cas du domaine $\Omega = [0,1] \times [-1,1]$

Dans le domaine de référence Ω, on considère le cas où

$$\begin{cases} f = r^3 z \sin(\frac{\theta}{2}) & \text{dans } \Omega \\ g = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On représente alors pour ($N = 30, K = 4$), le tracé de u^0 resp $Re(u^{12})$ et $Re(u^2)$ sur les figures 2.7.18 resp 2.7.19 et 2.7.20.

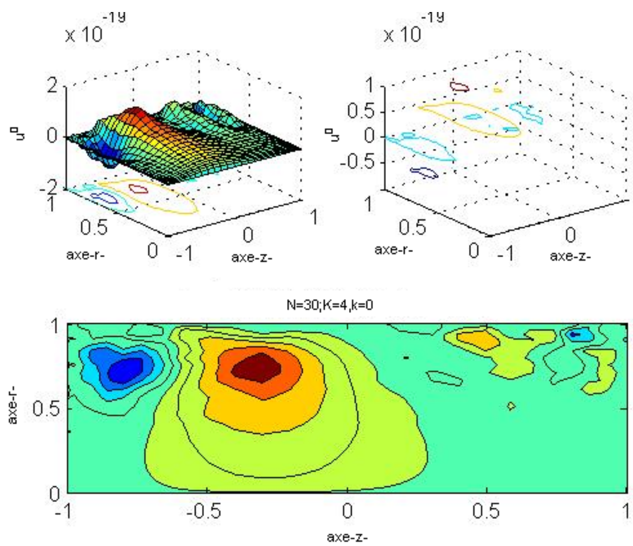

Fig. 2.7.18: Tracé de la fonction u^0

2.7.3.2 Domaine Ω^a

On considère le domaine Ω^a de la figure 2.7.1. On prend

$$\begin{cases} f = r^{7/2} z \sin(x+y) & \text{dans } \Omega^a \\ g = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On présente dans la figure 2.7.21 le tracé de u^0 dans les parties Ω_1^a avec $N = 24$ et $K = 6$, Ω_2^a avec $N = 24$ et $K = 6$, Ω_3^a avec $N = 24$ et $K = 6$ ensemble d'une part et d'autre part le tracé de u^0 sans décomposition de domaine.

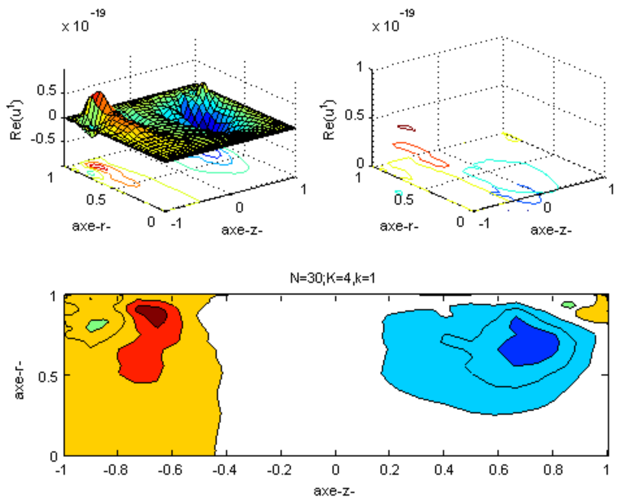

Fig. 2.7.19: Tracé de la fonction $\mathrm{Re}(u^1)$

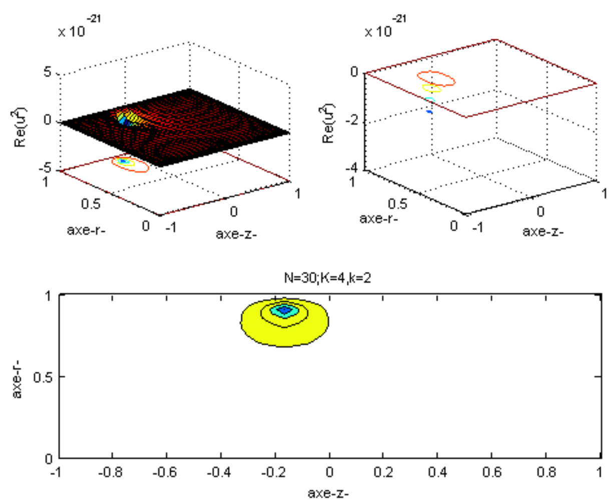

Fig. 2.7.20: Tracé de la fonction $Re(u^2)$

On représente ensuite dans la figure 2.7.22 les isovaleurs de u^0 avec $N = 24$ et $K = 6$.

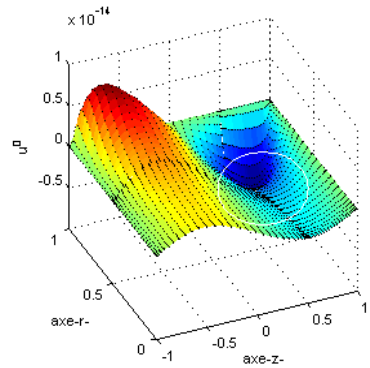

Fig. 2.7.21: Tracé de la fonction u^0 avec et sans décomposition de domaine

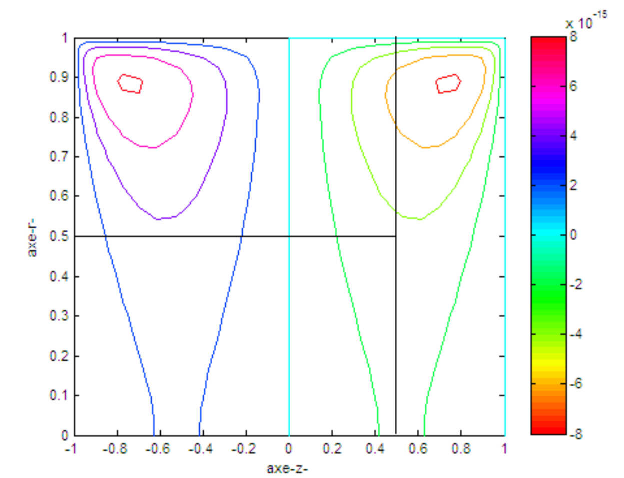

Fig. 2.7.22: Isovaleurs de u^0

On présente dans la figure 2.7.23 le tracé de $\mathrm{Re}(u^1)$ dans les parties Ω_1^a avec $N = 24$ et $K = 6$, Ω_2^a avec $N = 28$ et $K = 6$, Ω_3^a avec $N = 28$ et $K = 6$ ensemble d'une part et d'autre part le tracé de $\mathrm{Re}(u^1)$ sans décomposition de domaine.

On représente ensuite les isovaleurs de $\mathrm{Re}(u^1)$ sur la fig 2.7.24 avec $N = 24$ et $K = 6$.

Pour $K = 6$, on présente dans la figure 2.7.25 le tracé de u^2 dans les parties Ω_1^a

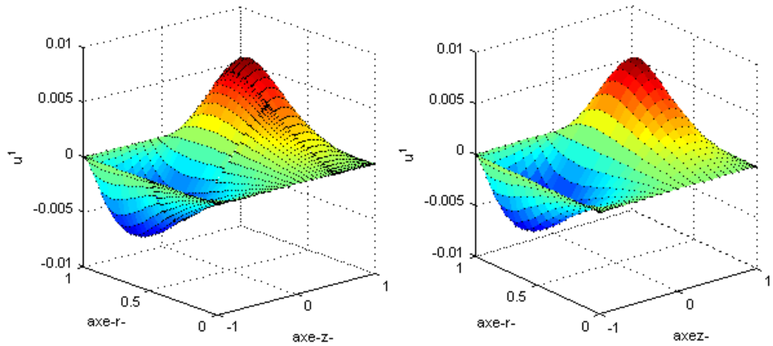

Fig. 2.7.23: Tracé de la fonction $\mathrm{Re}(u^1)$

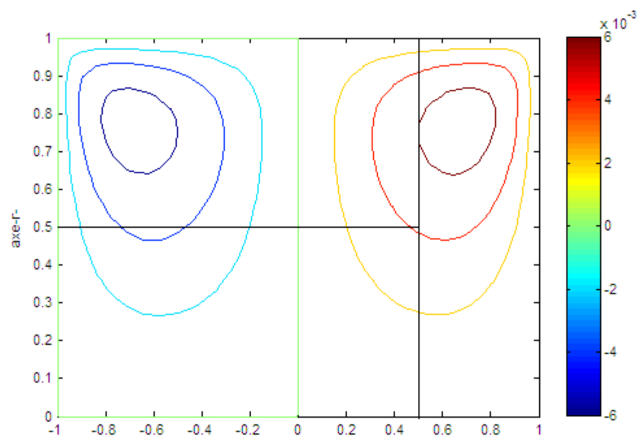

Fig. 2.7.24: Isovaleurs de $Re(u^1)$

avec $N = 24$, Ω_2^a avec $N = 28$, Ω_3^a avec $N = 28$ ensemble d'une part et d'autre part le tracé de u^2 sans décomposition de domaine.

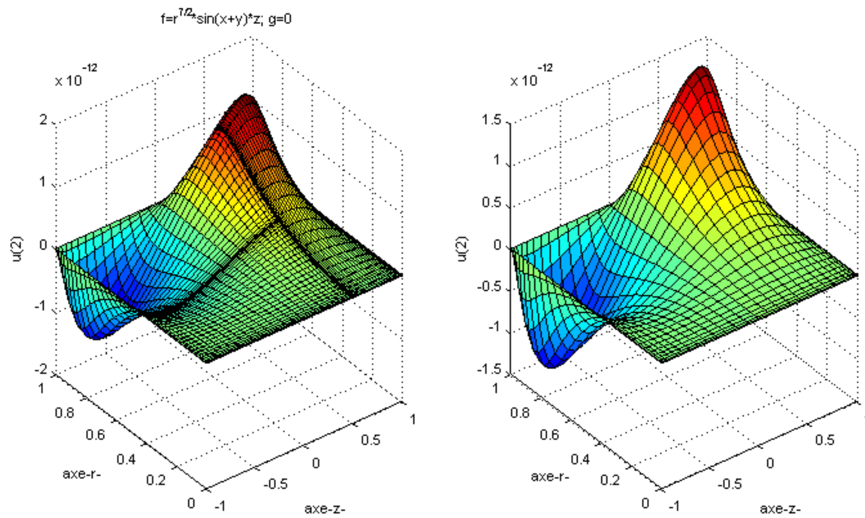

Fig. 2.7.25: Tracé de la fonction u^2

Remarque 2.7.1 *La solution $u^{(k)}$, $k \neq 0$ est complexe c'est pourquoi on précise dans les figures* $\text{Re}(u^{(k)})$ *ou bien* $Im(u^{(k)})$.

2.7.3.3 Domaine Ω^b :

On considère les fonctions :

$$\begin{cases} f = cos(x+y+z) & \text{dans } \Omega^b \\ g = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour $K = 4$, on représente dans la figure 2.7.26 le tracé de u^0 dans les parties Ω_1^b avec $N = 20$, Ω_2^b avec $N = 30$, Ω_3^b avec $N = 30$, Ω_4^b avec $N = 30$ et Ω_5^b avec $N = 20$.

On représente dans la figure 2.7.27, les isovaleurs de u^0 avec $N = 24$.

Pour $K = 4$, on représente dans la figure 2.7.28 le tracé de $\text{Re}(u^1)$ dans les parties Ω_1^b avec $N = 24$, Ω_5^b avec $N = 20$ et Ω_2^b, Ω_3^b, Ω_4^b avec $N = 30$. On représente dans la figure 2.7.29, les isovaleurs de $\text{Re}(u^1)$ avec $N = 24$.

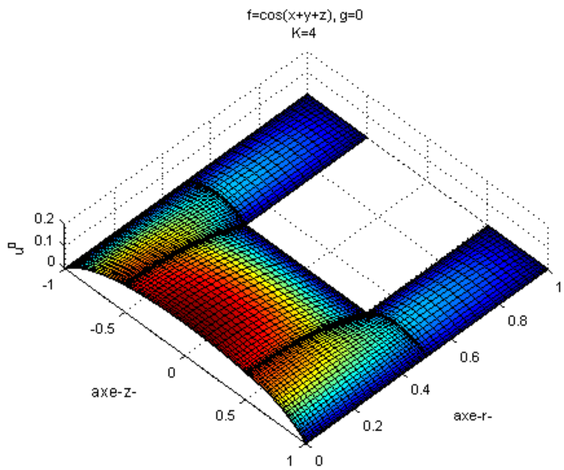

Fig. 2.7.26: Tracé de la fonction u^0

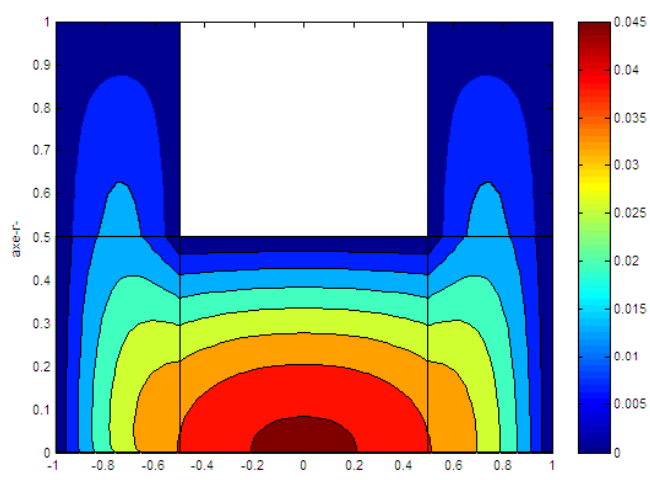

Fig. 2.7.27: Isovaleurs de u^0

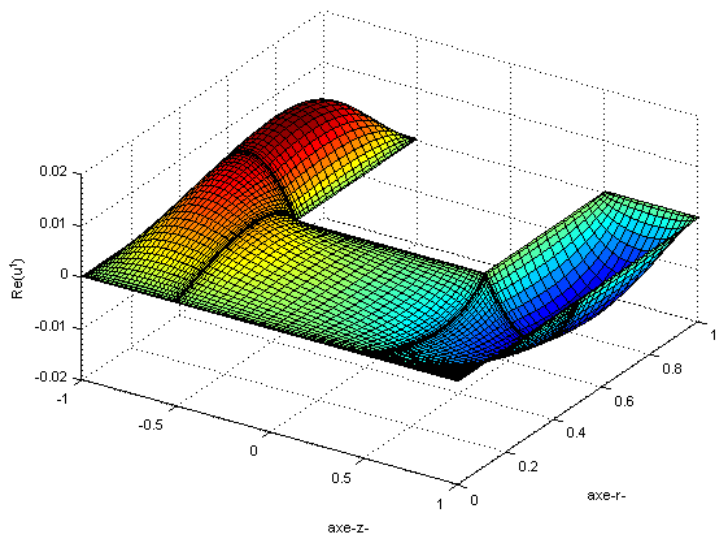

Fig. 2.7.28: Tracé de la fonction $\mathrm{Re}(u^1)$

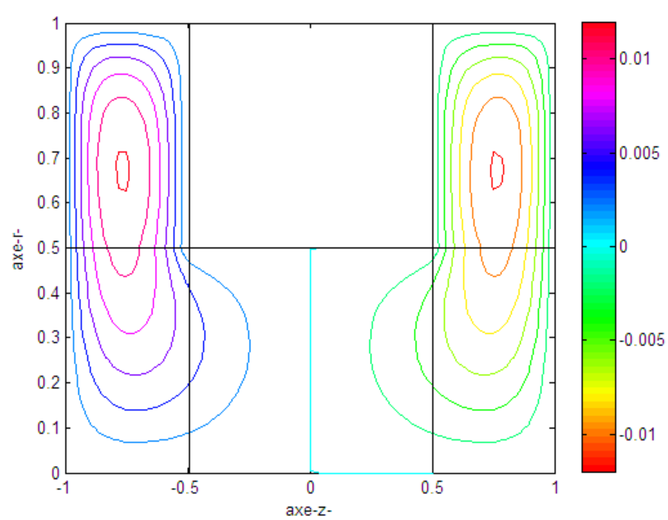

Fig. 2.7.29: Isovaleurs de $\mathrm{Re}(u^1)$

2.7.3.4 Mesures de l'erreur

Cas du domaine $\Omega = [0,1] \times [-1,1]$. 1) On considère la fonction régulière $u = xz$. On remarque une convergence en 10^{-15}, pour $K = 2$ dès que $N = 5$.

2) On considère ensuite la fonction singulière :

$$u = (x^2+1)^{7/3} z^2 \sin y$$

On choisit K le plus proche de $\log(N)$, on calcule les erreurs $\|u - u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega})}$ et $\|u - u_\delta\|_{H^1(\cup \breve{\Omega}_\ell)}$:

N	K	*Norme* $L^2(\breve{\Omega})$	*Norme* $H^1(\cup\breve{\Omega}_\ell)$
8	2	1.296×10^{-3}	8.106×10^{-2}
16	3	5.054×10^{-4}	3.550×10^{-3}
24	3	5.054×10^{-4}	3.550×10^{-3}
36	4	$7,046 \times 10^{-6}$	$6,410 \times 10^{-5}$
48	4	$7,046 \times 10^{-6}$	$6,410 \times 10^{-5}$

Domaine $\breve{\Omega}^a$ Soit la fonction singulière $u = r^{7/3}(\cos^2\theta + \sin\theta)$, on fixe $K = 3$. Les calculs des normes $\|u - u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}_i^a)}$, $\|u - u_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}_i^a)}$ $(i = 1, \cdots, 3)$, sur le domaine $\breve{\Omega}^a$ donne :

	sur $\breve{\Omega}_1^a$		sur $\breve{\Omega}_2^a$	
N	$L^2(\breve{\Omega}_1^a)$	$H^1(\breve{\Omega}_1^a)$	$L^2(\breve{\Omega}_2^a)$	$H^1(\breve{\Omega}_2^a)$
8	$2,0141 \times 10^{-7}$	$2,8068 \times 10^{-5}$	$1,7973 \times 10^{-6}$	$2,8068 \times 10^{-5}$
16	$3,1212 \times 10^{-8}$	$1,2380 \times 10^{-6}$	$8,1056 \times 10^{-8}$	$1,9875 \times 10^{-6}$
24	$1,2093 \times 10^{-9}$	$4,0938 \times 10^{-7}$	$1,2093 \times 10^{-8}$	$4,0938 \times 10^{-7}$
36	$1,4203 \times 10^{-10}$	$5,1421 \times 10^{-8}$	$1,7504 \times 10^{-9}$	$8,3975 \times 10^{-8}$
48	$1,0012 \times 10^{-11}$	$2,4571 \times 10^{-9}$	$1,2001 \times 10^{-10}$	$3,2140 \times 10^{-9}$

	sur $\breve{\Omega}_3^a$	
N	$L^2(\breve{\Omega}_3^a)$	$H^1(\breve{\Omega}_3^a)$
8	$1,0986 \times 10^{-6}$	$2,1212 \times 10^{-5}$
16	$3,2674 \times 10^{-8}$	$1,5887 \times 10^{-6}$
24	$4,3161 \times 10^{-9}$	$2,9994 \times 10^{-7}$
36	$5,8363 \times 10^{-10}$	$5,3171 \times 10^{-8}$
48	$2,1047 \times 10^{-11}$	$2,1540 \times 10^{-9}$

Commentaire : on remarque que pour un choix K qui n'est pas très élevé on trouve une très bonne précision pour $N = 48$. En effet le s dans l'estimation (2.5.7), ne depend que de la régularité de u. Ce qui montre que notre choix de prendre $K \leq N_\delta$ dans les estimations ne gène absolument pas les résultats numériques.

Domaine $\breve{\Omega}^b$ Pour la fonction singulière $u = (x - y)\,(x^2 + y^2)^{\frac{5}{4}}$, on fixe $K = 4$ et on donne les courbes $\left(\log_{10}(N), \log_{10} \|u - u_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}\right)$ et $\left(\log_{10}(N), \log_{10} \|u - u_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^b)}\right)$ sur la figure 2.7.30.

Commentaire : dans ces estimations d'erreur, on a aussi des droites, et ceci est en parfait accord avec les estimations théoriques (2.5.7) et (2.5.17).

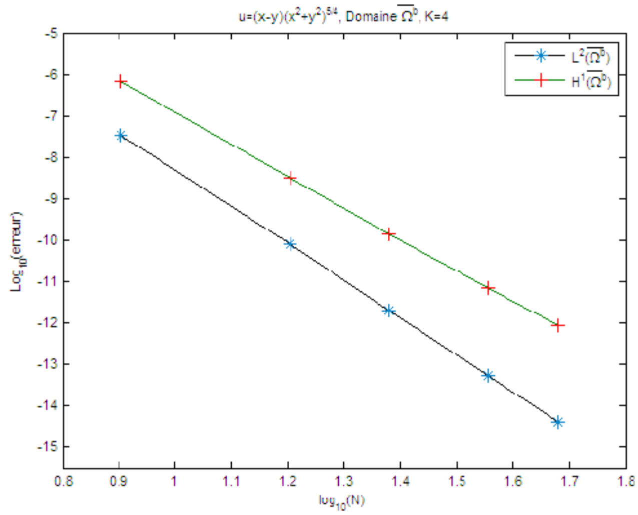

Fig. 2.7.30: Courbe d'erreur

Chapitre III

DISCRÉTISATION DU PROBLÈME DE STOKES PAR LA MÉTHODE DES JOINTS

3.1 Introduction

Le problème de Stokes régit l'écoulement lent d'un fluide visqueux incompressible dans un domaine donné. Pour un domaine tridimensionnel $\breve{\Omega}$, il s'écrit

$$\begin{cases} -\triangle \breve{\boldsymbol{u}} + \mathbf{grad}\ \breve{p} = \breve{\boldsymbol{f}} & dans\ \breve{\Omega}, \\ div \breve{\boldsymbol{u}} = 0 & dans\ \breve{\Omega}, \\ \breve{\boldsymbol{u}} = \breve{\boldsymbol{g}} & sur\ \partial\breve{\Omega}. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $\breve{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ est la vitesse du fluide et $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ est la pression hydrostatique au point $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$.

On suppose que $\breve{\Omega}$ est axisymétrique comme décrit au chapitre I et on utilise les coordonnées cylindriques pour les vecteurs $\breve{\boldsymbol{u}}, \breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$.

Dans le cas de données axisymétriques, où $\breve{\boldsymbol{f}} = (f_r, f_\theta, f_z)$ et $\breve{\boldsymbol{g}} = (g_r, g_\theta, g_z)$ sont indépendantes de θ, ce problème tridimensionnel se réduit à deux problèmes bidimensionnels non couplés. Un premier problème où l'inconnue est la composante u_θ de la vitesse $\breve{\boldsymbol{u}}$ et un second problème où les inconnues sont les composantes u_r et u_z de $\breve{\boldsymbol{u}}$ et la pression p.

Dans le cas de données non axisymétriques, le problème de Stokes est équivalent à une famille de problèmes bidimensionnels en coefficients de Fourier $(u_r^k, u_\theta^k, u_z^k, p^k)$ de la solution $(\breve{\boldsymbol{u}}, \breve{p})$.

3.2 Cas axisymétrique

3.2.1 Problème continu

Pour des données $\breve{\boldsymbol{f}} = (f_r, f_\theta, f_z)$ et $\breve{\boldsymbol{g}} = (g_r, g_\theta, g_z)$ le problème (3.1.1) se décompose sous forme de deux problèmes découplés :

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u_\theta - \frac{1}{r}\partial_r u_\theta - \partial_z^2 u_\theta + \frac{1}{r^2} u_\theta = f_\theta & dans\ \Omega \\ u_\theta = g_\theta & sur\ \Gamma \end{cases} \tag{3.2.1}$$

et

$$\begin{cases} -\partial_r^2 u_r - \frac{1}{r}\partial_r u_r - \partial_z^2 u_r + \partial_r p = f_r & dans\ \Omega \\ -\partial_r^2 u_z - \frac{1}{r}\partial_r u_z - \partial_z^2 u_z + \partial_z p = f_z & dans\ \Omega \\ \partial_r u_r + \frac{1}{r} u_r + \partial_z u_z = 0 & dans\ \Omega \\ (u_r, u_z) = (g_r, g_z) & sur\ \Gamma \end{cases} \tag{3.2.2}$$

où (u_r, u_z, u_θ) sont les coordonnés cylindriques de $\breve{\boldsymbol{u}}$. Le problème (3.2.1) est du type Laplace et est traité dans le chapitre précédent.

La formulation variationnelle du problème (3.2.2), s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_r, u_z, p) \text{ dans } V_1^1(\Omega) \times H_1^1(\Omega) \times L_1^2(\Omega), \\ \text{avec } u_r - g_r \text{ dans } V_{1\diamond}^1(\Omega) \text{ et } u_z - g_z \text{ dans } H_{1\diamond}^1(\Omega), \text{ tel que} \\ \forall (v_r, v_z) \in V_{1\diamond}^1(\Omega) \times H_{1\diamond}^1(\Omega), \\ a_1(u_r, v_r) + a(u_z, v_z) + b(v_r, v_z; p) = \langle f_r, v_r \rangle + \langle f_z, v_z \rangle \\ \forall q \in L_1^2(\Omega),\ b(u_r, u_z; q) = 0, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Les espaces $V_{1\diamond}^1(\Omega)$ et $H_{1\diamond}^1(\Omega)$ sont définis dans (1.6.13) et (1.6.16). Les formes $a(.,.)$ et $a_1(.,.)$ sont définies dans (2.3.1) et (2.4.4) avec $k = 1$. La forme $b(v_r, v_z; p)$ est définie par :

$$b(v_r, v_z; p) = -\int_\Omega q(\partial_r v_r + \frac{1}{r} v_r + \partial_z v_z) r dr dz.$$

On rappelle l'espace

$$\mathbb{V}(\Omega) = \left\{ (v_r, v_z) \in V_{1\diamond}^1(\Omega) \times H_{1\diamond}^1(\Omega);\ \forall q \in L_1^2(\Omega),\ b(v_r, v_z; q) = 0 \right\}, \tag{3.2.4}$$

qui est en fait l'ensemble de (v_r, v_z) qui vérifient $\partial_r v_r + \frac{1}{r} v_r + \partial_z v_z = 0$ dans Ω. On note

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a_1 \left(u_r, v_r\right) + a \left(u_z, v_z\right).$$

avec $\boldsymbol{u} = (u_r, u_z)$ et $\boldsymbol{v} = (v_r, v_z)$.

Le problème (3.2.3) admet alors une solution unique [8, Chapitre IX].

3.2.2 Problème discret

On suppose que Ω est décomposé en L sous-domaines Ω_ℓ : $\Omega = \bigcup\limits_{\ell=1}^{L} \Omega_\ell$ et on utilise, comme dans le chapitre précédent, des polynômes de degrés différents dans chaque sous-domaine Ω_ℓ pour définir nos espaces discrets. On note δ le L-uplets $(N_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$, $N_\ell \geq 2$. On rappelle l'espace discret $X_\delta(\Omega)$ introduit dans (2.3.8) donné par :

$$X_\delta(\Omega) = \{v_\delta \in L^2_1(\Omega) \text{ tels que } v_{\delta|\Omega_\ell} = v_\ell \in \mathbb{P}_{N_\ell}\left(\Omega_\ell\right),$$

$$v_{\ell|\Gamma^{\ell,j}} = \phi_{|\gamma_\mu^+} \text{ si } (\ell, j) = \left(\ell\left(\mu\right), j\left(\mu\right)\right),$$

$$\int_{\Gamma^{\ell,j}} \left(v_\ell - \phi\right)(\tau)\, \psi\left(\tau\right) d\tau = 0,\ \forall \psi \in \mathbb{P}_{N_\ell - 2}\left(\Gamma^{\ell,j}\right), 1 \leq j \leq 4 \text{ et } 1 \leq \ell \leq L \text{ si}$$

$$(\ell, j) \neq \left(\ell\left(\mu\right), j\left(\mu\right)\right)\}.$$

On rappelle ensuite

$$\begin{aligned} X_\delta^\diamond(\Omega) &= \{v_\delta \in X_\delta(\Omega) \text{ tels que } v_\delta = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \\ X_\delta^*(\Omega) &= \left\{v_\delta \in X_\delta(\Omega), v_\ell = v_{\delta|\Omega_\ell} \in L^2_{-1}\left(\Omega_\ell\right), 1 \leq \ell \leq L\right\}, \\ X_\delta^\circ(\Omega) &= X_\delta^\diamond(\Omega) \cap X_\delta^*(\Omega). \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On remarque que l'espace $X_\delta^*(\Omega)$ est constitué des fonctions de $X_\delta(\Omega)$ qui s'annulent sur Γ_0. Pour la pression discrète, on considère l'espace

$$M_\delta = \{p_\delta \in L^2_1\left(\Omega\right) | p_\ell = p_{|\Omega_\ell} \in \mathbb{P}_{N_\ell - 2}\left(\Omega_\ell\right) \text{ et } \int_\Omega p_\delta\left(r, z\right) r dr dz = 0\}. \tag{3.2.6}$$

Cet espace ne contient pas de modes parasites puisqu'on a réduit le degré des pressions [8]. L'espace $X_\delta^\diamond(\Omega)$ est muni de la norme induite

$$\|v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|^2_{H^1_1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}.$$

Sur $X_\delta^*(\Omega)$, on définit la norme induite :

$$\|v_\delta\|_{\mathcal{X}_*} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|^2_{V_1^1(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 3.2.1 *d'après (2.4.3), on a* $\|.\|_{\mathcal{X}_*} = \|.\|_{\mathcal{X}_*^1}$ *pour* $k = 1$.

On définit aussi sur chaque Ω_ℓ une formule de quadrature et un produit scalaire discret et on en déduit un produit scalaire sur Ω dont on rapelle l'expression. Pour φ et ψ dans $\overset{L}{\underset{\ell=1}{\cup}} C^0\left(\bar{\Omega}_\ell\right)$,

$$\begin{aligned} (\phi, \psi)_\delta &= \sum_{\ell=1}^{L_0} \sum_{i=0}^{N_\ell+1} \sum_{j=0}^{N_\ell} \phi_{|\Omega_k}\left(x_{ij}^k\right) \psi_{|\Omega^k}\left(x_{ij}^k\right) \omega_{ij}^k \\ &+ \sum_{\ell=L_{0+1}}^{L} \sum_{i,j=0}^{N_\ell} \phi_{|\Omega_\ell}\left(y_{ij}^\ell\right) \psi_{|\Omega_\ell}\left(y_{ij}^\ell\right) \xi_i^{(r),\ell} p_{ij}^\ell \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Les formes bilinéaires discrètes sont définies comme suit, pour u et $v \in \overset{L}{\underset{\ell=1}{\cup}} C^0\left(\bar{\Omega}_\ell\right)$ et nuls sur $r = 0$,

$$a_\delta\left(u, v\right) = \left(\nabla u, \nabla v\right)_\delta$$

et

$$a_{1\delta}\left(u, v\right) = a_\delta\left(u, v\right) + \left(\tfrac{u}{r}, \tfrac{v}{r}\right)_\delta$$

et pour $\boldsymbol{w} = (u, v) \in \{\overset{L}{\underset{\ell=1}{\cup}} C^0\left(\bar{\Omega}_\ell\right)\}^2$ et $q \in \overset{L}{\underset{\ell=1}{\cup}} C^0\left(\bar{\Omega}_\ell\right)$

$$b_\delta\left(\boldsymbol{w}, q\right) = -\left(div_r \boldsymbol{w}, q\right)_\delta$$

où l'opérateur div_r est donné par :

$$div_r \boldsymbol{w} = \partial_r u + \frac{1}{r} u + \partial_z v = \frac{1}{r} \partial_r\left(ru\right) + \partial_z v.$$

Soit $\mathbb{Z}_\delta$ l'espace défini par :

$$\mathbb{Z}_\delta = \{\boldsymbol{w}_\delta = (u_\delta, v_\delta) \in \prod_{\ell=1}^{L} V_1^1\left(\Omega_\ell\right) \times \prod_{\ell=1}^{L} H_1^1\left(\Omega_\ell\right)\}.$$

On définit la norme produit $\|.\|_{\mathbb{Z}}$ par :

$$\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}} = \|u_\delta\|_{\mathcal{X}_*} + \|v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1}. \tag{3.2.8}$$

On introduit $\boldsymbol{Z}_\delta$ l'espace produit $X_\delta^* \times X_\delta^\diamond$, sur lequel on définit la norme induite $\|.\|_{\mathbb{Z}}$.

Le problème discret associé au problème (3.2.1) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{\delta\theta} \in X_\delta^*(\Omega) \\ \text{tels que } u_{\delta\theta} - \mathcal{I}_\delta g_\theta \in X_\delta^\circ(\Omega) \\ \forall w_{\delta\theta} \in X_\delta^\circ(\Omega) \quad a_{1\delta}\left(u_{\delta\theta}, w_{\delta\theta}\right) = \left(\mathcal{I}_\delta f_\theta, w_{\delta\theta}\right)_\delta , \end{cases} \tag{3.2.9}$$

et a fait le sujet du chapitre II.

Le problème discret associé au problème (3.2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_{\delta r}, u_{\delta z}, p_\delta) \in X_\delta^*(\Omega) \times X_\delta(\Omega) \times M_\delta(\Omega) \\ \text{tel que } u_{\delta r} - \mathcal{I}_\delta g_r \in X_\delta^\circ(\Omega) \text{ et } u_{\delta z} - \mathcal{I}_\delta g_z \in X_\delta^\diamond(\Omega) \\ \forall \boldsymbol{w}_\delta = (w_{\delta r}, w_{\delta z}) \in X_\delta^\circ(\Omega) \times X_\delta^\diamond(\Omega) \\ a_{1\delta}\left(u_{\delta r}, w_{\delta r}\right) + a_\delta\left(u_{\delta z}, w_{\delta z}\right) + b_\delta\left(\boldsymbol{w}_\delta, p_\delta\right) = \left(\mathcal{I}_\delta f_r, w_{\delta r}\right)_\delta + \left(\mathcal{I}_\delta f_z, w_{\delta z}\right)_\delta , \\ \text{et } \forall q_\delta \in M_\delta \\ b_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, q_\delta\right) = 0, \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Ce problème (3.2.10) se met dans le cadre abstrait de problèmes mixtes. Les ingrédients essentiels pour montrer qu'il soit bien posé sont la vérification d'une condition inf-sup pour la forme bilinéaire b_δ et sa continuité ainsi que la continuité et coercivité des formes $a_{1\delta}, a_\delta$. On rappelle que dans nôtre cas, il existe des constantes $\alpha, \alpha_1, \gamma, \gamma_1$ positives, telles que :

$|a_\delta\left(u_\delta, v_\delta\right)| \leq \alpha \left\|u_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \left\|v_\delta\right\|_{\mathcal{X}_1^1}$ et $a_\delta\left(u_\delta, u_\delta\right) \geq \gamma \left\|u_\delta\right\|^2_{\mathcal{X}_1^1}$.

$|a_{1\delta}\left(u'_\delta, v'_\delta\right)| \leq \alpha_1 \left\|u'_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*} \left\|v'_\delta\right\|_{\mathcal{X}_*}$ et $a_{1\delta}\left(u'_\delta, u'_\delta\right) \geq \gamma_1 \left\|u'_\delta\right\|^2_{\mathcal{X}_*}$.

On notera $\mathcal{A}_\delta(.,.)$

$$\mathcal{A}_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta\right) = a_{1\delta}\left(u_{r\delta}, w_{r\delta}\right) + a_\delta\left(u_{z\delta}, w_{z\delta}\right).$$

avec $\boldsymbol{u}_\delta = (u_{r\delta}, u_{z\delta})$ et $\boldsymbol{w}_\delta = (w_{r\delta}, w_{z\delta})$, on déduit que $\mathcal{A}_\delta$ est continue et coercive sur $X_\delta \times X_\delta^*$ pour la norme $\|.\|_{\mathbb{Z}}$.

On remarque que sur chaque $\Omega_\ell, 1 \leq \ell \leq L$, l'exactitude de la formule de quadrature fait que

$$\forall \boldsymbol{v}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta, \forall q_\delta \in M_\delta,\ b_\delta\left(\boldsymbol{v}_\delta, q_\delta\right) = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} q_\ell\left(r,z\right)\ div_r \boldsymbol{v}_\ell\ rdrdz = b\left(\boldsymbol{v}_\delta, q_\delta\right),$$

on en déduit que la forme $b_\delta\left(.,.\right)$ est continue sur $\boldsymbol{Z}_\delta \times M_\delta$ et que la constante de continuité est indépendante de δ.

La proposition suivante montre l'existence d'une condition inf-sup globale sur la forme $b_\delta\left(.,.\right)$.

Proposition 3.2.1 *On a la condition inf-sup suivante, pour tout $q_\delta \in M_\delta$,*

$$\sup_{\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{b_\delta\left(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta\right)}{\left\|\boldsymbol{w}_\delta\right\|_{\mathbb{Z}}} \geq \beta_\delta \left\|q_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega)} \tag{3.2.11}$$

où

$$\beta_\delta = \bar{N}_\delta^{-\frac{1}{2}}(\log \bar{N}_\delta)^{-1}\ \ et\ \bar{N}_\delta = \max\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}. \tag{3.2.12}$$

Preuve On se donne un élément q_δ de M_δ. On décompose q_δ de la manière suivante

$$q_\delta = \bar{q}_\delta + \breve{q}_\delta$$

avec

$$\bar{q}_\ell = \bar{q}_\delta|_{\Omega_\ell} = \frac{1}{mes(\Omega_\ell)} \int\limits_{\Omega_\ell} q_\ell(r,z) rdrdz.$$

1) Sur chaque Ω_ℓ, on remarque que $\breve{q}_\ell = \breve{q}_\delta|_{\Omega_\ell} \in M_\ell$ où

$$M_\ell = \{q \in \mathbb{P}_{N_{\ell-2}}(\Omega_\ell), \int\limits_{\Omega_\ell} q(r,z) rdrdz = 0, 1 \leq \ell \leq L\}.$$

D'après [8, Proposition X.2.5] et [23, Chapitre V, (25,24)] on a les résultats suivants.

a) Si $\ell > L_0$, alors il existe $\breve{\boldsymbol{w}}_\ell = (\breve{u}_{r,\ell}, \breve{v}_{r,\ell}) \in \mathbb{P}^0_{N_\ell}(\Omega_\ell) \times \mathbb{P}^0_{N_\ell}(\Omega_\ell)$ tel que $b(\breve{\boldsymbol{w}}_\ell, \breve{q}_\ell) = \left\|\breve{q}_\ell\right\|^2_{L^2_1(\Omega_\ell)}$ et

$$\left\|\breve{\boldsymbol{w}}_\delta\right\|_{V^1_1(\Omega_\ell)^2} \leq \tilde{c}\sqrt{N_\ell} \log N_\ell \left\|\breve{q}_\ell\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)}.$$

b) Si $1 \leq \ell \leq L_0$ il existe $\breve{\boldsymbol{w}}_\ell = (\breve{u}_{r,\ell}, \breve{v}_{r,\ell}) \in \mathbb{P}^0_{N_\ell}(\Omega_\ell) \times \mathbb{P}^\diamond_{N_\ell}(\Omega_\ell)$ tel que $b(\breve{\boldsymbol{w}}_\ell, \breve{q}_\ell) = \|\breve{q}_\ell\|^2_{L^2_1(\Omega_\ell)}$ et

$$\|\breve{\boldsymbol{w}}_\ell\|_{V^1_1(\Omega_\ell)\times H^1_1(\Omega_\ell)} \leq \tilde{c}' \sqrt{N_\ell} \log N_\ell \, \|\breve{q}_\ell\|_{L^2_1(\Omega_\ell)} .$$

Soit $\breve{\boldsymbol{w}}_\delta$ tel que $\breve{\boldsymbol{w}}_\delta|_{\Omega_\ell} = \breve{\boldsymbol{w}}_\ell$, alors $\breve{\boldsymbol{w}}_\delta = (\breve{u}_{r\delta}, \breve{v}_{r\delta}) \in X^\circ_\delta(\Omega) \times X^\diamond_\delta(\Omega)$ et on a :

$$\begin{aligned} & b(\breve{\boldsymbol{w}}_\delta, \breve{q}_\delta) = \|\breve{q}_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)} \\ & \|\breve{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq \tilde{C}\sqrt{N_\delta} \log N_\delta \, \|\breve{q}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} \\ & N_\delta = \max\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}. \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

2) Comme $\bar{q}_\delta$ est constante sur chaque Ω_ℓ, on a d'après [8, Lemme XI.1.1] l'existence de $\bar{\boldsymbol{w}}_\delta \in X^\circ_\delta(\Omega)^2$ telle que

$$b(\bar{\boldsymbol{w}}_\ell, \bar{q}_\ell) = \|\bar{q}_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)}$$

et

$$\|\bar{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq \|\bar{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathcal{X}_*\times\mathcal{X}_*} \leq \bar{c}\, \|\bar{q}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} . \tag{3.2.14}$$

On utilise la décomposition qui est due à Boland et Nicolaides, on pose alors $\boldsymbol{w}_\delta = \breve{\boldsymbol{w}}_\delta + \lambda \bar{\boldsymbol{w}}_\delta$ on a $\boldsymbol{w}_\delta \in X^\circ_\delta(\Omega) \times X^\diamond_\delta(\Omega)$. Il reste à trouver λ pour que la condition (3.2.11) soit vérifiée. On a

$$\begin{aligned} b_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta) &= -\int_\Omega q_\delta div_r \boldsymbol{w}_\delta(r,z) r dr dz \\ &= -\int_\Omega (\breve{q}_\delta + \bar{q}_\delta) div_r(\breve{\boldsymbol{w}}_\delta + \lambda \bar{\boldsymbol{w}}_\delta)(r,z) r dr dz \\ &= -\int_\Omega \breve{q}_\delta div_r \breve{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z) r dr dz - \lambda \int_\Omega \breve{q}_\delta div_r \bar{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z) r dr dz \\ &\quad -\int_\Omega \bar{q}_\delta div_r \breve{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z) r dr dz - \lambda \int_\Omega \bar{q}_\delta div_r \bar{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z) r dr dz. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_\Omega \bar{q}_\delta div_r \breve{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z) r dr dz = \bar{q}_\delta \int_{\partial\Omega} \breve{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z).\boldsymbol{n} r dr dz = 0,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} b_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta) &\geq \|\breve{q}_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)} + \lambda \|\bar{q}_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)} - c\lambda \|\breve{q}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} \|\bar{q}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} . \\ &\geq (1 - \frac{c^2\eta^2}{2}) \|\breve{q}_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)} + \lambda(1 - \frac{\lambda}{2\eta^2}) \|\bar{q}_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)} \end{aligned}$$

où $\eta > 0$. En posant $\eta = \frac{1}{c}$ et $\lambda = \eta^2$ on a finalement :

$$b_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta) \geq \inf\{\frac{1}{2c^2}, \frac{1}{2}\} \|q_\delta\|^2_{L^2_1(\Omega)} . \tag{3.2.15}$$

De même en utilisant (3.2.13) et (3.2.14), on obtient

$$\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq C\sqrt{N_\delta} \log N_\delta \|q_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} \tag{3.2.16}$$

En combinant (3.2.15) et (3.2.16) on obtient (3.2.11).

La continuité et la coercivité de a_δ et $a_{1\delta}$ respectivement sur $X^\diamond_\delta \times X^\diamond_\delta$ et $X^*_\delta \times X^*_\delta$ et la condition inf-sup (3.2.11) permettent d'avoir le théorème suivant. ■

Théorème 3.2.1 *Pour tout* $\boldsymbol{f} \in L^2_1(\Omega)^2$ *et* $\boldsymbol{g} \in H^1_1(\Omega)^2$ *le problème (3.2.10) admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$ *dans* $\mathbf{Z}_\delta \times M_\delta$.

Preuve La condition inf-sup pour la forme bilinéaire b_δ et sa continuité ainsi que la continuité et coercivité des formes $a_{1\delta}, a_\delta$ donne l'existence et l'unicité de la solution $(\boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$. ■

3.2.3 Estimation de l'erreur

On considère maintenant l'espace $\mathbb{V}_\delta$ donné par :

$$\mathbb{V}_\delta = \{\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta \mid b_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta) = 0, \forall q_\delta \in M_\delta\},$$

Proposition 3.2.2 *Soit* $(\boldsymbol{u}, p)$ *la solution du problème (3.2.2) et* $(\boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$ *la solution* *du problème (3.2.10). On a alors :*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \;\le\; & c\{\inf_{\boldsymbol{v}_\delta\in\mathbb{V}_\delta}[\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \\ & +\sup_{\boldsymbol{w}_\delta\in\boldsymbol{Z}_\delta}\frac{\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{w}_\delta)-\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{w}_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}] \\ & +\inf_{q_\delta\in M_\delta}\|p-q_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} \\ & +\sup_{\boldsymbol{z}_\delta\in\boldsymbol{Z}_\delta}\frac{\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{z}_\delta\,(r,z)\,r dr dz-(\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f}\,,\boldsymbol{z}_\delta)_\delta}{\|\boldsymbol{z}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \\ & +\sup_{\boldsymbol{y}_\delta\in\boldsymbol{Z}_\delta}\frac{\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}\{-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_m}+p\boldsymbol{n}\,(\tau)\}.\,[\boldsymbol{y}_\delta]\,(\tau)\,d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}\}.\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

où c est une constante positive indépendante de δ.

Preuve Pour tout $\boldsymbol{v}_\delta\in\mathbb{V}_\delta$ on a

$$\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{u}_\delta-\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{u}_\delta-\boldsymbol{v}_\delta)=(\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f}\,,\boldsymbol{u}_\delta-\boldsymbol{v}_\delta)_\delta-a_\delta(\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{u}_\delta-\boldsymbol{v}_\delta) \tag{3.2.18}$$

On pose $\boldsymbol{u}_\delta-\boldsymbol{v}_\delta=\boldsymbol{w}_\delta\in\mathbb{V}_\delta$ on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega(-\boldsymbol{f}-\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p)\boldsymbol{w}_\delta r dr dz \;=\; & \mathcal{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_\delta)+b(\boldsymbol{w}_\delta,p) \\ & -\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{w}_\delta r dr dz \\ & +\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}(-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_m}+p\;\boldsymbol{n}\,(\tau)).\,[\boldsymbol{w}_\delta]\,(\tau)\,d\tau \\ =\; & 0.\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

On injecte le terme (3.2.19) dans le terme (3.2.18), on obient :

$$\begin{aligned}a_\delta(\boldsymbol{w}_\delta,\boldsymbol{w}_\delta) \;=\; & (\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f}\,,\boldsymbol{w}_\delta)_\delta-\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{w}_\delta r dr dz \\ & +b(\boldsymbol{w}_\delta,p) \\ & +\mathcal{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_\delta)-\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{w}_\delta) \\ & +\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}(-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_m}+p\boldsymbol{n}\,(\tau)).\,[\boldsymbol{w}_\delta]\,(\tau)\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Combinant la coercivité de a_δ sur $\mathbb{V}_\delta$, la continuité de b sur $\boldsymbol{Z}_\delta \times M_\delta$, la condition inf-sup (3.2.11) et le fait que $b(\boldsymbol{w}_\delta, q) = 0$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{v}_\delta||^2_{\mathbb{Z}} &\leq \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) \\
&\leq ||p - q_\delta||_{L^2_1(\Omega)} ||\boldsymbol{w}_\delta||_{\mathbb{Z}} + ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta||_{\mathbb{Z}} ||\boldsymbol{w}_\delta||_{\mathbb{Z}} \\
&\quad + \sup_{\boldsymbol{z}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \{ \frac{(\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_\delta)_\delta - \int_\Omega \boldsymbol{f}\, \boldsymbol{z}_\delta r dr dz}{||\boldsymbol{z}_\delta||_{\mathbb{Z}}} \} ||\boldsymbol{w}_\delta||_{\mathbb{Z}} \\
&\quad + \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) \\
&\quad + \sup_{\boldsymbol{y}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \{ \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \{ -\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + p.\boldsymbol{n}\,(\tau) \} \, [\boldsymbol{y}_\delta]\,(\tau)\, d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \} ||\boldsymbol{w}_\delta||_{\mathbb{Z}}.
\end{aligned}
$$

On utilise l'inégalité triangulaire $||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta||_{\mathbb{Z}} \leq ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta||_{\mathbb{Z}} + ||\boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{v}_\delta||_{\mathbb{Z}}$ pour conclure. ■

Remarque 3.2.2 *Si on considère l'espace $\mathbb{V}_\delta^- = \mathbb{V}_\delta \cap \mathbb{P}_{\delta-1}$ et on choisit $\boldsymbol{v}_\delta$ dans cet espace, le terme $\sup\limits_{\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}$ s'annule.*

On va maintenant estimer le terme $\inf\limits_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_\delta} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}}$, en deux étapes, dans la première, nous allons considérer la géométrie du domaine conforme et dans la seconde non conforme. Pour cela on commence par introduire pour tout entier naturel m le polynôme $\mathbb{P}_N^{m,0}(\Lambda)$ défini par :

$$\mathbb{P}_N^{m,0}(\Lambda) = \{ v \in \mathbb{P}_N(\Lambda),\ v(\pm 1) = \cdots = v^{m-1}(\pm 1) = 0 \}.$$

avec la notation $\mathbb{P}_N^{1,0}(\Lambda) = \mathbb{P}_N^0(\Lambda)$. Ensuite on va introduire l'opérateur de relèvement de traçe $\mathcal{R}^{2,\gamma}$ qui va nous servir dans la preuve.

Lemme 3.2.1 *Pour tout côté γ de mesure non nulle de $\bar{\Sigma}$, il existe un opérateur de relèvement $\mathcal{R}^{2,\gamma}$ de $\mathbb{P}_N^{2,0}(\gamma) \times \mathbb{P}_N^0(\gamma)$, dans $\mathbb{P}_N(\Sigma)$ telle que*

$$\forall \phi = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathbb{P}_N^{2,0}(\gamma) \times \mathbb{P}_N^0(\gamma)$$

on a :

$$\partial_n^k \mathcal{R}^{2,\gamma}(\phi) = \begin{cases} \varphi_k \ \textit{sur}\ \bar{\gamma} \\ 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega \backslash \gamma \end{cases}$$

où $k \in \{0,1\}$, et pour tout réel s tel que $\frac{3}{2} < s < \frac{5}{2}$ on a :

$$\left\|\mathcal{R}^{2,\gamma}(\phi)\right\|_{H_1^s(\Sigma)} \leq c\left(\|\varphi_0\|_{H_1^{s-\frac{1}{2}}(\gamma)} + \|\varphi_1\|_{H_1^{s-\frac{3}{2}}(\gamma)}\right). \tag{3.2.21}$$

Pour la preuve on cite [18] et [17]. Grâce à ce lemme, on est maintenant en mesure d'énoncer la proposition suivante, on suppose toutefois qu'on est dans le cas homogène (le cas non homogène sera traité ultérieurement).

Proposition 3.2.3 *Soit $\boldsymbol{u} = (u_r, u_z)$ la solution du problème (3.2.3), on suppose que $\boldsymbol{u}_{|\Omega_\ell} \in \boldsymbol{H}_1^{s+1}(\Omega_\ell)$ alors il existe $\boldsymbol{v}_\delta$ dans $\mathbb{V}_\delta$ et c tels que :*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\lambda_\delta^{\frac{3}{4}} \sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{3.2.22}$$

où λ_δ est défini dans (2.3.25).

Preuve I) Cas homogène

a) Etape 1 : construction de $\boldsymbol{v}_\delta^{12}$

Soit la fonction $\eta_p^*(\zeta)$ modifiée de la fonction construite dans le lemme 2.3.3 et qui a les mêmes propriétés que $\eta_p(\zeta)$:

$$\eta_p^*(\zeta) = \frac{\left(1-\zeta^2\right)^2}{\left(1-a_p^2\right)^2} \frac{\varphi_i^- + \varphi_{i+1}^-}{(\varphi_i^- + \varphi_{i+1}^-)(a_p)} \prod_{p' \neq p} \frac{\zeta - a_{p'}}{a_p - a_{p'}},$$

où φ_i^- est le polynôme de Lagrange avec $0 \leq i \leq N-P-3$, associé aux nœuds ζ_i^- de Gauss-Lobatto. cette fonction η_p^* est dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ et vérifie $\eta_p^*(a_p) = 1$ et 0 en ± 1 et en $a_{p'\neq p}$. Ce polynôme η_p^* satisfait :

$$\left\|\eta_p^*\right\|_{L_1^2(\Lambda)} \leq cN^{-\frac{1}{2}}, \quad \left\|\eta_p^*\right\|_{H_1^1(\Lambda)} \leq cN^{\frac{1}{2}} \text{ et } \left\|\eta_p^*\right\|_{H_1^2(\Lambda)} \leq cN^{\frac{3}{2}} \tag{3.2.23}$$

La constante c dépend uniquement des points a_p. Soit γ_μ^+, $1 \leq \mu \leq M^+$ les joints et $\mathcal{C}_\mu^+$ l'ensemble de tous les coins qui se trouvent sur γ_μ^+. On construit alors la fonction déduite de (2.3.34) par

$$\tilde{\Phi}_{\mu,e}^* = \begin{cases} \Phi_{\mu,e}^* & \text{dans } \Omega_\mu^+ \\ 0 & \text{dans } \Omega\backslash\bar{\Omega}_\mu^+ \end{cases} \tag{3.2.24}$$

$\Phi^*_{\mu,e}$ est obtenu à partir de Φ^* par homothétie et translation, où $\Phi^*(\zeta,\eta) = \eta^*_p(\zeta)(\frac{1-\eta}{2})^{N^+_\mu}$.

On pose $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Rot}_a(\psi)$.

*) Soit $\boldsymbol{v}^1_\delta$ tel que $\boldsymbol{v}^1_{|\Omega_\ell} = \boldsymbol{v}^1_\ell = \boldsymbol{Rot}_a(\tilde{\Pi}^{*,2}_N \psi_\ell)$. On construit z^1_δ avec $z^1_\ell = \tilde{\Pi}^{*,2}_N \psi_\ell$ alors on a

$$z^2_\delta = \sum_{\mu=1}^{M^+} \sum_{e\in\mathcal{C}^+_\mu} (\psi - z^1_{\delta|\Omega^+_\mu})(e)\tilde{\Phi}^*_{\mu,e}$$

On pose $z^{12}_\delta = z^1_\delta + z^2_\delta$.

**) Soit $\boldsymbol{v}^{12}_\delta = \boldsymbol{Rot}_a\,(z^{12}_\delta)$, cette fonction vérifie la nullité sur Γ, et est à divergence nulle, et on a $z^{12}_{\delta|\gamma^+_m} - z^{12}_{\delta|\gamma^-_m}$ s'annule sur toutes les extrémités des non joints γ^-_m, $1 \le m \le M^-$ (γ^+_m étant le côté γ^-_m vu dans l'autre direction voir figure 2.3.2). D'une part on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^1_\delta\right\|_{H^1_1(\Omega_\ell)^2} &= \sum_{\ell=1}^{L} \left\|\psi - \tilde{\Pi}^{*,2}_N \psi_\ell\right\|_{H^2_1(\Omega_\ell)^2} \\
&\le c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|\psi\right\|_{H^{s_\ell+2}_1(\Omega_\ell)} \\
&\le c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}_\ell\right\|_{V^{s_\ell+1}_1(\Omega_\ell)\times H^{s_\ell+1}_1(\Omega_\ell)}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\boldsymbol{Rot}_a\left(z^2_\delta\right)\right\|_{H^1_1(\Omega_\ell)^2} \le \sum_{\mu=1}^{M^+} \sum_{e\in\mathcal{C}_\mu} |(\psi - z^1_{\delta|\Omega^+_\mu})(e)| \left\|\boldsymbol{Rot}_a(\tilde{\Phi}^*_{\mu,e})\right\|_{H^1_1(\Omega^+_\mu)^2}$$

en utilisant (2.3.35), on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\boldsymbol{Rot}_a\left(z^2_\delta\right)\right\|_{H^1_1(\Omega_\ell)^2} \le c\sum_{\mu=1}^{M^+} (N^+_\mu)^{-s^+_\mu-1} \left\|\psi\right\|_{H^{s^+_\mu+2}_1(\Omega^+_\mu)} \left\|\tilde{\Phi}^*_{\mu,e}\right\|_{H^2_1(\Omega^+_\mu)}$$

D'après la définition de $\tilde{\Phi}^*_{\mu,e}$, on a

$$\left\|\Phi^*_{\mu,e}\right\|_{H^2_1(\Sigma)} \le cN^+_\mu. \tag{3.2.25}$$

En effet on a

$$\left\|(\frac{1-\eta}{2})^N\right\|_{H^s_1(\Omega)} \le cN^{s-\frac{1}{2}} \tag{3.2.26}$$

En combinant (3.2.23) et (3.2.26, pour $s=0$, $s=1$, $s=2$), on déduit (3.2.25). Enfin on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\| \boldsymbol{Rot}_a \left(z_\delta^2\right) \right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)^2} \leq c \sum_{\mu=1}^{M^+} (N_\mu^+)^{-s_\mu^+} \left\| \boldsymbol{u}_\ell \right\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\mu^+) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\mu^+)} .$$

D'où on déduit que

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta^{12} \right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)^2} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\| \boldsymbol{u}_\ell \right\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} . \tag{3.2.27}$$

b) Etape 2 : construction de $\tilde{\pi}_N^{+,2}$ et $\tilde{\pi}_N^2$

L'élément $\boldsymbol{v}_\delta^{12} = \boldsymbol{Rot}_a \left(z_\delta^{12}\right)$ ne vérifie pas la condition sur les interfaces γ_m^-, $1 \leq m \leq M^-$. Pour relever ce terme, on commence par définir deux opérateurs de projections $\tilde{\pi}_N^{+,2}$ et $\tilde{\pi}_N^2$, :

$*$) L'opérateur $\tilde{\pi}_N^{+,2}$ de $H_1^2(\Lambda)$ dans $\mathbb{P}_{N+2}(\Lambda)$ vérifie

$$\begin{cases} \int_\Lambda \left(\tilde{\pi}_N^{+,2}\varphi - \varphi\right) \psi(r)\, r dr = 0, \ \forall \psi \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda) \\ \left(\tilde{\pi}_N^{+,2}\varphi - \varphi\right)(\pm 1) = 0 \\ \left(\tilde{\pi}_N^{+,2}\varphi - \varphi\right)'(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

et pour $0 \leq t \leq 2 < s$ et pour toute fonction $\varphi \in H_1^s(\Lambda)$, on a

$$\left\| \varphi - \tilde{\pi}_N^{+,2}\varphi \right\|_{H_1^t(\Lambda)} \leq c N^{t-s} \left\| \varphi \right\|_{H_1^s(\Lambda)} \tag{3.2.28}$$

En effet en considérant l'application

$$\begin{array}{cc} j : \mathbb{P}_{N+2}^{2,0}(\Lambda) & \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda) \\ \chi & \chi^{(4)} \end{array}$$

qui est un isomorphisme, on peut donc montrer que $\tilde{\pi}_N^{+,2} = \tilde{\pi}_{N+2}^{+,2,0}(\varphi - \varphi_3^\diamond) + \varphi_3^\diamond$, où $\tilde{\pi}_N^{+,2,0}$ est l'opérateur de projection orthogonale de $V_{1\diamond}^2(\Lambda)$ dans $\mathbb{P}_N^{2,0}(\Lambda)$ et $\varphi_3^\diamond$ est un polynôme de degré 3 tel que $\varphi_3^\diamond(-1) = \varphi(-1), \varphi_3^{\diamond\prime}(-1) = \varphi'(-1)$ et $\varphi_3^\diamond(1) = \varphi_3^{\diamond\prime}(1)$. Cette construction est dûe à [1], et l'inégalité (3.2.28) est une conséquence de la proposition IV.3.9 de [**?**].

$**$) L'opérateur $\tilde{\pi}_N^2$ de $H^2(\Lambda)$ dans $\mathbb{P}_{N+2}(\Lambda)$ vérifie

$$\begin{cases} \int_\Lambda \left(\tilde{\pi}_N^2\varphi - \varphi\right)\psi(r)\,ds = 0,\ \forall\psi \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda) \\ \left(\tilde{\pi}_N^2\varphi - \varphi\right)(\pm 1) = 0 \\ \left(\tilde{\pi}_N^2\varphi - \varphi\right)'(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

et pour $0 \le t \le 2 < s$ et pour toute fonction $\varphi \in H^s(\Lambda)$, on a

$$\left\|\varphi - \tilde{\pi}_N^2\varphi\right\|_{H^t(\Lambda)} \le cN^{t-s}\,\|\varphi\|_{H^s(\Lambda)}.$$

On réfère à [11, lemme 1.5] pour l'étude de cet opérateur. On note alors $\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}$:

$$\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^-} = \begin{cases} \tilde{\pi}_N^2\varphi \text{ si } \Lambda \text{ est parallèle à l'axe } r = 0 \\ \tilde{\pi}_N^{*,2}\varphi \text{ sinon.} \end{cases} \tag{3.2.29}$$

c) Etape 3 : construction de $\boldsymbol{v}_\delta^3$:

On pose $\sigma_{\gamma_m^-} = \tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}$, $\sigma^n_{\gamma_m^-} = \partial_n\left(\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right)$. On remarque que $\sigma_{\gamma_m^-}$ et $\sigma^n_{\gamma_m^-}$ s'annule sur les extrémités de γ_m^-. En effet $z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-}$ est nulle sur les extrémités de γ_m^- et $\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}$ et $\partial_n\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}$ conserve la nullité sur les coins. Donc on pose $\boldsymbol{v}_\delta^3$:

$$\boldsymbol{v}_\delta^3 = \boldsymbol{Rot}_a\left(z_\delta^{12}\right) + \sum_{m=1}^{M^-}\boldsymbol{Rot}_a \circ \tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma_m^-}(\sigma_{\gamma_m^-}, \sigma^n_{\gamma_m^-}).$$

On remarque que $\boldsymbol{v}_\delta^3$ est la bonne approximation de $\boldsymbol{u}$. En effet $\boldsymbol{v}_\delta^3$ est nul sur Γ, à divergence nulle et vérifie la condition de compatibilité. De plus on a

$$\left\|\boldsymbol{Rot}_a \circ \tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma_m^-}(\sigma_{\gamma_m^-}, \sigma^n_{\gamma_m^-})\right\|_{H_1^1(\Omega_m^-)} \le c\left\|\tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma_m^-}(\sigma_{\gamma_m^-}, \sigma^n_{\gamma_m^-})\right\|_{H_1^2(\Omega_m^-)}.$$

En utilisant (3.2.21) on a

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma_m^-}(\sigma_{\gamma_m^-}, \sigma^n_{\gamma_m^-})\right\|_{H_1^2(\Omega_m^-)} &\le c\Big(\left\|\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} \\ &\quad + \left\|\partial_n\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{1}{2}}(\gamma_m^-)}\Big) \\ &\le c\left\|\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)}. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité des traces de $H_1^s(\Omega)$ dans $H_1^{s-\frac{1}{2}}(\gamma)$ et le fait que

$$\begin{aligned}
\left\|\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} &\leq \left\|\left(Id - \tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- -2}\right)(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} \\
&\quad + \left\|(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} \\
&\leq c(\left\|(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} \\
&\quad + \left(N_m^-\right)^{-\frac{1}{2}} \left\|(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right\|_{H_1^2(\gamma_m^-)}
\end{aligned}$$

on déduit que $\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^+}$ et $\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-}$ s'annulent sur les extrémités de γ_m^- ainsi que leurs dérivées premières, alors ils appartiennent à $V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)$. On a en plus le fait que $z^2_{\delta|\gamma_m^-}$ s'annule sur γ_m^- ce qui implique

$$\left\|(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} \leq \left\|\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} + \left\|\psi - z^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)}$$

et

$$\left\|z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{H_1^2(\gamma_m^-)} \leq \left\|\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^+}\right\|_{H_1^2(\gamma_m^-)} + \left\|\psi - z^{1}_{\delta|\gamma_m^-}\right\|_{H_1^2(\gamma_m^-)}.$$

On rappelle l'inégalité d'interpolation pour $\psi \in V_1^r(\gamma)$ où γ est un côté de $\mathbb{R}$ et $0 \leq r \leq s$

$$\|\psi\|_{V_1^r(\gamma)} \leq c\,\|\psi\|^{1-\frac{r}{s}}_{L_1^2(\gamma)}\,\|\psi\|^{\frac{r}{s}}_{H_1^s(\gamma)} \tag{3.2.30}$$

Ceci entraine pour $r = \frac{3}{2}$ et $s = 2$ que

$$\left\|\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^\pm}\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma_m^-)} \leq c\left\|\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^\pm}\right\|^{\frac{1}{4}}_{L_1^2(\gamma_m^-)}\left\|\psi - z^{12}_{\delta|\gamma_m^\pm}\right\|^{\frac{3}{4}}_{H_1^2(\gamma_m^-)} \tag{3.2.31}$$

On a aussi l'inégalité suivante

$$\left\|\psi - z^1_\ell\right\|_{H_1^2(\Gamma)} + N_\ell\left\|\psi - z^1_\ell\right\|_{H_1^1(\Gamma)} + N_\ell^2\left\|\psi - z^1_\ell\right\|_{L_1^2(\Gamma)} \leq cN_\ell^{\frac{3}{2}-s_\ell}\;\|\psi\|_{H_1^{s_\ell+2}(\Omega_\ell)} \tag{3.2.32}$$

où Γ est un côté de Ω_ℓ. On note $\mathcal{K}_m^-$ l'ensemble des indices, $1 \leq \mu \leq M^+$, tel que $\gamma_m^- \cap \gamma_\mu^+$ a une mesure non nulle. On écrit alors

$$\gamma_m^- = \sum_{\mu\in\mathcal{K}_m^-} \gamma_m^- \cap \gamma_\mu^+.$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|(z^{12}_{\delta|\gamma^+_m} - z^{12}_{\delta|\gamma^-_m})\right\|_{V_1^{\frac{3}{2}}(\gamma^-_m)} &\leq c(N^-_m)^{-s^-_m}\,\|\psi\|_{H_1^{s^-_m+2}(\Omega^-_m)} \\ &\quad + c^*_{\gamma^-_m}\sum_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{-s^+_\mu}\,\|\psi\|_{H_1^{s^+_\mu+2}(\Omega^+_\mu)}\end{aligned}$$

où

$$c^*_{\gamma^-_m} = \max_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{3}{8}} / \min_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{3}{8}}$$

On a

$$\begin{aligned}\max_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{3}{8}} / \min_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{3}{8}} &\leq \frac{\max_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{3}{4}}}{2N_m^{-\frac{3}{4}}} + \frac{N_m^{-\frac{3}{4}}}{2\min_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{3}{4}}} \\ &\leq \lambda_\delta^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|(z^{12}_{\delta|\gamma^+_m} - z^{12}_{\delta|\gamma^-_m})\right\|_{H^1_1(\gamma^-_m)} &\leq c[(N^-_m)^{-s^-_m}\,\|\psi\|_{H_1^{s^-_m+2}(\Omega^-_m)} \\ &\quad + (N^-_m)^{-\frac{1}{2}}\sum_{\mu\in\mathcal{K}^-_m}(N^+_\mu)^{\frac{1}{2}-s^+_\mu}\,\|\psi\|_{H_1^{s^+_\mu+2}(\Omega^+_\mu)}].\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\sum_{m=1}^{M^-}\left\|\boldsymbol{Rot}_a\circ\tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma^-_m}(\sigma_{\gamma^-_m},\sigma^n_{\gamma^-_m})\right\|_{H^1_1(\Omega^-_m)} = c\lambda_\delta^{\frac{3}{4}}\sum_{\ell=1}^{L}N_\ell^{-s_\ell}\,\|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}.$$

combiné avec (3.2.27), on déduit (3.2.22). ■

Dans le cas conforme on peut éliminer le terme λ_δ et nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.1 *Soit* $\boldsymbol{u} = (u_r, u_z)$ *la solution du problème (3.2.3), on suppose que* $\boldsymbol{u}_{|\Omega_\ell} \in \boldsymbol{H}_1^{s+1}(\Omega_\ell)$ *alors il existe* $\boldsymbol{v}_\delta$ *dans* $\mathbb{V}_\delta$ *et* c *tels que :*

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\sum_{\ell=1}^{L}N^{-s_\ell}\,\|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{3.2.33}$$

Preuve Soit $\boldsymbol{u} = (u_r, u_z)$ la solution du problème (3.2.3). On suppose que $u \in \boldsymbol{H}_1^{s+2}(\Omega)$, d'après [8, remarque IX.1.2], il existe ψ dans $\boldsymbol{H}_1^{s+2}(\Omega)$ tel que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Rot}_a(\psi)$ avec $\psi = 0$ et $\partial_n \psi = 0$ sur Γ. Dans le cas axisymétrique on pose

$$\boldsymbol{Rot}_a(\mu) = \left(\partial_z \mu, -\frac{1}{r}\partial_r(r\mu)\right).$$

On remarque qu'avec la définition

$$div_r(\boldsymbol{u}) = \partial_r u_r + \frac{1}{r}u_r + \partial_z u_z$$

on a

$$div_r(\boldsymbol{Rot}_a(\mu)) = 0. \tag{3.2.34}$$

On définit les opérateurs de projection orthogonale $\tilde{\Pi}_N^2$ et $\tilde{\Pi}_N^{-,2}$ déduits de $\tilde{\Pi}_N^2$ et $\Pi_N^{-,2}$ par homothétie et translation [8, Proposition V.3.9] :

$$\tilde{\Pi}_N^2 : V_1^2(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{P}_{N_\ell}(\Sigma)$$

et

$$\tilde{\Pi}_N^{-,2} : V_1^2(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{P}_{N_\ell}^{2,*}(\Sigma)$$

et qui vérifient pour $0 < t \leq 2 < s$

$$\left\|\psi - \tilde{\Pi}_N^{*,2}\psi\right\|_{V_1^t(\Omega)} \leq cN^{t-s}\left\|\psi\right\|_{H_1^s(\Omega)}. \tag{3.2.35}$$

avec

$$\tilde{\Pi}_N^{*,2} = \begin{cases} \tilde{\Pi}_N^2 \text{ si } \Omega \text{ est loin de l'axe } r = 0 \\ \tilde{\Pi}_N^{-,2} \text{ si } \Omega \text{ touche l'axe } r = 0. \end{cases}$$

Cet opérateur conserve les valeurs des coins de Ω et la nullité des côtés de $\partial\Omega$.

a) Etape 1 : construction de $\boldsymbol{v}_\delta$

On travaille localement. Soit $\boldsymbol{v}_\delta$ tel que $\boldsymbol{v}_{|\Omega_\ell} = \boldsymbol{v}_\ell = \boldsymbol{Rot}_a(\tilde{\Pi}_N^{*,2}\psi_\ell)$, or d'après (3.2.34), $div_r \boldsymbol{v}_\delta = 0$ et on a l'approximation suivante :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} &= \sum_{\ell=1}^{L} \left\|\boldsymbol{Rot}_a(\psi_\ell - \tilde{\Pi}_N^{*,2}\psi_\ell)\right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)} \\
&\leq c\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\psi_\ell - \tilde{\Pi}_N^{*,2}\psi_\ell\right\|_{H_1^2(\Omega_\ell)} \\
&\leq c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \|\psi_\ell\|_{H_1^{s_\ell+2}(\Omega_\ell)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{3.2.36}$$

L'inconvénient est que $\boldsymbol{v}_\delta$ ne vérifie pas la condition de compatibilité sur les interfaces. Pour le corriger on va lui ajouter au terme $\boldsymbol{v}_\delta$ un terme de type $\boldsymbol{Rot}_a(\mu)$ pour satisfaire la condition (3.2.34) d'une part et la condition de compatibilité sur les interfaces d'autre part.

b) Etape 2 : Construcion de $\boldsymbol{w}_\delta$

On considère la figure 3.2.1.On choisit γ_m^- le non joint de façon à avoir toujours

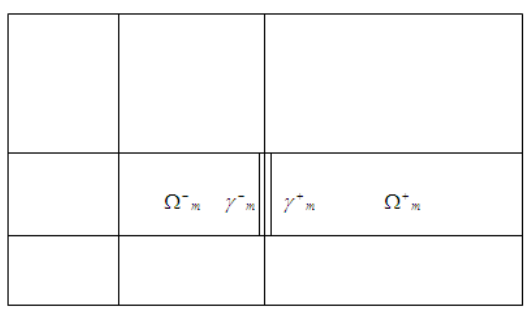

Fig. 3.2.1: Décomposition conforme

$N_m^- \geq N_m^+$. Après avoir choisi l'ensemble de non joints indéxés par M^- (on garde les mêmes notations que dans la preuve de la proposition 2.3.5), on note z_δ l'élément tel que $z_{\delta|\Omega_\ell} = \tilde{\Pi}_N^{*,2}\psi_\ell$ et $z^n_{\delta|\Omega_\ell} = \tilde{\Pi}_N^{*,2}(\partial_n\psi_\ell)$. On pose $(z_{\delta|\gamma_m^+} - z_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-} = \sigma_{\gamma_m^-}$ et

$(z^n_{\delta|\gamma^+_m} - z^n_{\delta|\gamma^-_m})_{|\gamma^-_m} = \sigma^n_{\gamma^-_m}$. On remarque que $\sigma_{\gamma^-_m}$ et $\sigma^n_{\gamma^-_m}$ sont nuls sur les extremités de γ^-_m puisque $\tilde{\Pi}^{*,2}_N$ conserve les valeurs des coins et que ψ_ℓ et $\partial_n\psi_\ell$ sont continues sur les interfaces pour $s > \frac{5}{2}$. On pose alors

$$\boldsymbol{w}_\delta = \sum_{m=1}^{M^-} \boldsymbol{Rot}_a \circ \tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma^-_m}(\sigma_{\gamma^-_m}, \sigma^n_{\gamma^-_m}). \tag{3.2.37}$$

On a alors

$$\left\|\boldsymbol{Rot}_a \circ \tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma^-_m}(\sigma_{\gamma^-_m}, \sigma^n_{\gamma^-_m})\right\|_{H^1_1(\Omega^-_m)} \leq c \left\|\tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma^-_m}(\sigma_{\gamma^-_m}, \sigma^n_{\gamma^-_m})\right\|_{H^2_1(\Omega^-_m)}.$$

En utilisant (3.2.21) on a

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma^-_m}(\sigma_{\gamma^-_m}, \sigma^n_{\gamma^-_m})\right\|_{H^2_1(\Omega^-_m)} &\leq c\Big(\left\|(z_{\delta|\gamma^+_m} - z_{\delta|\gamma^-_m})_{|\gamma^-_m}\right\|_{H_1^{\frac{3}{2}}(\gamma^-_m)} \\ &\quad + \left\|(z^n_{\delta|\gamma^+_m} - z^n_{\delta|\gamma^-_m})_{|\gamma^-_m}\right\|_{H_1^{\frac{1}{2}}(\gamma^-_m)}\Big)\end{aligned}$$

la continuité des traces de $H^s_1(\Omega)$ dans $H_1^{s-\frac{1}{2}}(\gamma)$ nous permet de déduire que

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma^-_m}(\sigma_{\gamma^-_m}, \sigma^n_{\gamma^-_m})\right\|_{H^2_1(\Omega^-_m)} &\leq c(\|\psi - z_\delta\|_{H^2_1(\Omega^-_m)} + \|\psi - z_\delta\|_{H^2_1(\Omega^+_m)} + \\ &\quad \|\partial_n\psi - z^n_\delta\|_{H^1_1(\Omega^-_m)} + \|\partial_n\psi - z^n_\delta\|_{H^1_1(\Omega^+_m)}),\end{aligned}$$

on déduit ensuite de (3.2.35) que

$$\begin{aligned}\|\psi - z_\delta\|_{H^2_1(\Omega^-_m)} + \|\psi - z_\delta\|_{H^2_1(\Omega^+_m)} &\leq N^{-s^-_m}\|\psi\|_{H_1^{s^-_m+2}(\Omega^-_m)} \\ &\quad + N^{-s^+_m}\|\psi\|_{H_1^{s^+_m+2}(\Omega^+_m)}\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

et

$$\begin{aligned}\|\partial_n\psi - z^n_\delta\|_{H^1_1(\Omega^-_m)} + \|\partial_n\psi - z^n_\delta\|_{H^1_1(\Omega^+_m)}) &\leq N^{-s^-_m}\|\partial_n\psi\|_{H_1^{s^-_m+1}(\Omega^-_m)} \\ &\quad + N^{-s^+_m}\|\partial_n\psi\|_{H_1^{s^+_m+1}(\Omega^+_m)} \\ &\leq N^{-s^-_m}\|\psi\|_{H_1^{s^-_m+2}(\Omega^-_m)} \\ &\quad + N^{-s^+_m}\|\psi\|_{H_1^{s^+_m+2}(\Omega^+_m)}.\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Enfin en combinant (3.2.38), (3.2.39) et en sommant sur m, on déduit que

$$\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \|\psi\|_{H_1^{s_\ell+2}(\Omega_\ell)}$$

et que

$$\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{3.2.40}$$

c) Etape 3 : Construction de $\boldsymbol{y}_\delta = \boldsymbol{v}_\delta + \boldsymbol{w}_\delta$

On vérifie que $\boldsymbol{y}_\delta$ vérifie la condition de compatibilité. En combinant (3.2.36) et (3.2.40), on déduit que

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}.$$

■

Proposition 3.2.4 *Soit $(\boldsymbol{u}, p)$ la solution du problème (3.2.2) et $(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{p}_\delta)$ la solution du problème (3.2.10). On a alors :*

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_\delta\|_{L_1^2(\Omega)} \leq\ & c(1+\beta_\delta^{-1})\{\inf_{q_\delta\in M_\delta} \|p - q_\delta\|_{L_1^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \\
& \inf_{\boldsymbol{v}_\delta\in \boldsymbol{Z}_\delta}[\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \sup_{\boldsymbol{w}_\delta\in\boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}] \\
& + \sup_{\boldsymbol{z}_\delta\in\boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{z}_\delta\,(r,z)\,r\ dr\ dz - (\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}\,, \boldsymbol{z}_\delta)_\delta}{\|\boldsymbol{z}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \\
& + \sup_{\boldsymbol{y}_\delta\in\boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \{-\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + p\boldsymbol{n}\,(\tau)\}.\,[\boldsymbol{y}_\delta]\,(\tau)\,d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}\}
\end{aligned}$$

où c est une constante positive indépendante de δ et β_δ est défini dans (3.2.11).

Preuve Soit $\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta$ on a

$$b_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, p_\delta - q_\delta) = (\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}\,, \boldsymbol{w}_\delta)_\delta - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - b_\delta(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta)$$

et

$$\begin{aligned}
0 =\ & \int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{w}_\delta r dr dz - \mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_\delta) \\
& - b(\boldsymbol{w}_\delta, q_\delta) - b(\boldsymbol{w}_\delta, p - q_\delta) \\
& + \sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (-\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + p\ \boldsymbol{n}\,(\tau)).\,[\boldsymbol{w}_\delta]\,(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

La condition inf-sup (3.2.11) donne

$$\begin{aligned}
\beta_\delta ||p_\delta - q_\delta||_{L^2_1(\Omega)} &\leq \sup_{\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{|b(\boldsymbol{w}_\delta, p - q_\delta)|}{||\boldsymbol{w}_\delta||_{\mathbb{Z}}} \\
&\leq ||p - q_\delta||_{L^2_1(\Omega)} \\
&\quad + \sup_{\boldsymbol{w}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \\
&\quad + \sup_{\boldsymbol{z}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{f}\, \boldsymbol{z}_\delta\,(r,z)\, r dr dz - (\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}\,, \boldsymbol{z}_\delta)_\delta}{\|\boldsymbol{z}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \\
&\quad + \sup_{\boldsymbol{y}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \{-\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + p\boldsymbol{n}\,(\tau)\}.\, [\boldsymbol{y}_\delta]\,(\tau)\, d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_\delta) - a_\delta(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) &= \mathcal{A}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) \\
&\quad + \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) \\
&\leq c\{\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \\
&\quad + |a(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - a_\delta(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)|\}
\end{aligned}$$

Finalement et pour être en mesure de majorer l'erreur, il nous reste à majorer l'erreur d'approximation qui est le sujet de la proposition suivante. ■

Théorème 3.2.2 *Soit* $(\boldsymbol{u}, p)$ *la solution du problème (3.2.2) et* $(\boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$ *la solution du problème (3.2.10). On suppose que* $\boldsymbol{u}_{|\Omega_\ell} \in \mathbf{V}_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)$, $p_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)$ *avec* $s_\ell > \frac{1}{2}$ $(s_\ell > \frac{3}{2}$ *si* $\ell \leq L_0)$ *et* $\boldsymbol{f}\,|_{\boldsymbol{\Omega_\ell}} \in H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^2$ *avec* $\sigma_\ell > 1$ $(\sigma_\ell > \frac{3}{2}$ *si* $\ell \leq L_0)$. *Alors on distingue deux cas :*

1) ***Cas homogène :*** *on a*

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \beta_\delta ||p - p_\delta||_{L^2_1(\Omega)} &\leq c\{\sum_{\ell=1}^{L} (1+\lambda_\ell)^{\frac{3}{4}} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell}\, \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell}\, \|p\|_{H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell}\, \|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^2}\}.
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

*2) **Cas non homogène :** on a*

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}}+\beta_\delta\|p-p_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} \leq\; & c\{\beta_\delta^{-1}\sum_{\ell=1}^{L}(1+\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}}N_\ell^{-s_\ell}(\log N_\ell)^{\varrho_\ell}\,\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\
& +\sum_{\ell=1}^{L}N_\ell^{-s_\ell}(\log N_\ell)^{\varrho_\ell}\,\|p\|_{H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)} \qquad (3.2.42)\\
& +\sum_{\ell=1}^{L}N_\ell^{-\sigma_\ell}\,\|\boldsymbol{f}\,\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^2}\}.
\end{aligned}
$$

où

$$\bar{N}_\delta=\max\{N_\ell, 1\leq\ell\leq L\}$$

et ϱ_ℓ resp λ_ℓ sont définis dans (2.4.5) resp (2.3.38).

Preuve Nous allons étudier chacun des termes des propositions 3.2.2 et 3.2.4.

1) **Erreur de consistance** : On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_\delta)-\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{w}_\delta) \;=\; & a_1(v_r,w_{r\delta})-a_{1\delta}(v_r,w_{r\delta}) \\
& +a(v_z,w_{z\delta})-a_\delta(v_z,w_{z\delta}).
\end{aligned}
$$

Pour le terme $a_1(v_r,w_{r\delta})-a_{1\delta}(v_r,w_{r\delta})$, on intercale $x_{\delta-1}$ tel que $x_{\delta-1}|_{\Omega_\ell}=\Pi^{-,1}_{N_\ell-1}u_r$, où $\Pi^{-,1}_{N_\ell-1}$ est l'operateur de projection orthogonale de $V_1^1(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}^*_{N_\ell-1}(\Omega_\ell)$. Pour le terme $a(v_z,w_{z\delta})-a_\delta(v_z,w_{z\delta})$, on intercale $y_{\delta-1}$ tel que $y_{\delta-1}|_{\Omega_\ell}=\Pi^{+,1}_{N_\ell-1}u_z$, où $\Pi^{+,1}_{N_\ell-1}$ est l'operateur de projection orthogonale de $H_1^1(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_{N_\ell-1}(\Omega_\ell)$ et on applique [8, Proposition V.3.3 et V.3.8] pour conclure que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_\delta)-\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{v}_\delta,\boldsymbol{w}_\delta) \;\leq\; & c\sum_{\ell=1}^{L}(\left\|u_r-\Pi^{-,1}_{N_\ell-1}u_r\right\|_{V_1^1(\Omega_\ell)} \\
& +\left\|u_z-\Pi^{+,1}_{N_\ell-1}u_z\right\|_{H_1^1(\Omega_\ell)}) \\
\leq\; & c\sum_{\ell=1}^{L}N_\ell^{-s_\ell}\,\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)\times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}
\end{aligned}
$$

2) **Erreur de quadrature** : On a

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{z}_\delta r\,dr\,dz-(\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f}\,,\boldsymbol{z}_\delta)_\delta \;=\; & \int_\Omega f_r z_{r\delta} r\,dr\,dz-(\mathcal{I}_\delta f_r,z_{r\delta})_\delta \\
& +\int_\Omega f_z z_{z\delta} r\,dr\,dz-(\mathcal{I}_\delta f_z,z_{z\delta})_\delta\,.
\end{aligned}
$$

Le premier terme est majoré par $\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \|f_r\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)}$ et le second par $\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \|f_z\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)}$.

3) **Erreur d'approximation sur les pressions** :

On a $\inf_{q_\delta \in M_\delta} ||p - q_\delta||_{L_1^2(\Omega)} \leq \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \|p\|_{H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)}$. En effet il suffit de prendre

$$q_\delta = \Pi_\delta p - \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega \Pi_\delta p \; d\tau$$

et de remarquer que $p - q_\delta = (p - \Pi_\delta p) + \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega (\Pi_\delta p - p) \; d\tau$ pour conclure.

4) D'après la proposition 2.3.6 on a

$$\sup_{\boldsymbol{y}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}_m} [\boldsymbol{y}_\delta](\tau) \, d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}$$

et pour le terme $\sup_{\boldsymbol{y}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} p\boldsymbol{n}(\tau).[\boldsymbol{y}_\delta](\tau) d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}}$, on utilise les mêmes arguments on obtient

$$\sup_{\boldsymbol{y}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} p\boldsymbol{n} [\boldsymbol{y}_\delta](\tau) \, d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \|p\|_{H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)}.$$

5) Le terme $\inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}}$ est majoré par $c \sum_{\ell=1}^{L} (1+\lambda_\ell)^{\frac{1}{2}} N_\ell^{-s_\ell} \|\boldsymbol{u}_\ell\|_{V_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}$. En effet on utilise la proposition 2.3.5 et la proposition 2.4.4, (pour $k = 1$).

6.a) Dans le cas homogène, le terme $\inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_\delta} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}}$ est majoré dans la proposition 3.2.3.

6.b) Dans le cas non homogène on utilise un résultat général pour estimer la distance entre $(u_r^\diamond, u_z^\diamond)$ et $V_N^u(\Omega)$, voir [35, Chapitre. II, (1.16)], or d'après [22, Thm 23.10] on a

$$\begin{aligned} &\inf_{(w_{rN}, w_{zN}) \in V_N^u(\Omega)} (\|u_r^\diamond - w_{rN}\|_{V_1^1(\Omega)} + \|u_z^\diamond - w_{zN}\|_{H_1^1(\Omega)}) \\ &\leq c(1 + \beta_N^{-1}) \inf_{(v_{rN}, v_{zN}) \in \mathbb{P}_N^0(\Omega) \times \mathbb{P}_N^\diamond(\Omega)} (\|u_r^\diamond - v_{rN}\|_{V_1^1(\Omega)} + \|u_z^\diamond - v_{zN}\|_{H_1^1(\Omega)}) \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Si Ω ne touche pas l'axe $r = 0$, on prend dans le second membre de l'inégalité $(v_{rN}, v_{zN}) \in \mathbb{P}_N^0(\Omega) \times \mathbb{P}_N^\diamond(\Omega)$.

Si on généralise ce résultat, dans le cas d'un domaine Ω décomposé en sous domaines, on obtient que

$$\beta_{N_\ell}^{-1} \leq \bar{N}_\delta^{\frac{1}{2}} \log \bar{N}_\delta, \forall \;\; 1 \leq \ell \leq L.$$

et

$$\inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_\delta} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \leq c\beta_\delta^{-1} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell) \times H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}.$$

■

3.2.4 Estimations d'erreur : cas avec singularités

On commence par rappeler un résultat sur les singularités qui est analogue au cas de Laplace on cite [8] et [24].

Théorème 3.2.3 *On suppose que $\boldsymbol{f} \in H_-^{s-1}(\Omega) \times H_+^{s-1}(\Omega)$ et $\boldsymbol{g} \in H_-^{s+1}(\Omega) \times H_+^{s+1}(\Omega)$, avec $s > \frac{5}{2}$. Soit $(\boldsymbol{u}, p)$ la solution du problème (3.2.2) et $(\boldsymbol{u}_\delta, p_\delta)$ la solution du problème (3.2.10). Alors on distingue deux cas :*

1) ***Cas homogène :*** *on a*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \beta_\delta ||p - p_\delta||_{L_1^2(\Omega)} \leq c(1 + \lambda_\delta)^{\frac{3}{4}} \sup\{N_\delta^{1-s}, E_\delta^S\} \|\boldsymbol{f}\|_{H_1^{s-1}(\Omega)^2}. \quad (3.2.44)$$

2) ***Cas non homogène :*** *on a*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \beta_\delta ||p - p_\delta||_{L_1^2(\Omega)} \;\; &\leq \;\; c(1 + \lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \beta_\delta^{-1} E_\delta^S\} \quad (3.2.45) \\ & \qquad (\|\boldsymbol{f}\|_{H_1^{s-1}(\Omega)^2} + \|\boldsymbol{g}\|_{H_1^{s+1}(\Omega)^2}). \end{aligned}$$

où

$$E_\delta^S = \max\{E_\ell^S, 1 \leq \ell \leq L\}. \quad (3.2.46)$$

et

$$E_\ell^S = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\Omega}_\ell \text{ ne contient pas des } e_i, \\ N_{e_i}^{-2\eta(\frac{\pi}{2})} (\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}} & \text{si } \bar{\Omega}_\ell \text{ contient } e_i \text{ avec } \omega_{e_i} = \frac{\pi}{2}, \\ N_{e_i}^{-2\eta(\frac{3\pi}{2})} (\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}} & \text{si } \bar{\Omega}_\ell \text{ contient } e_i \text{ avec } \omega_{e_i} = \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.2.47)$$

N_{e_i} est défini dans la proposition 2.3.7.

Remarque 3.2.3 *On a les valeurs approximatives* $\eta(\frac{\pi}{2}) \simeq 2,73959$ *et* $\eta(\frac{3\pi}{2}) \simeq 0,54448$.

Preuve 1) **Cas homogène**

On écrit $u_r = u_{r,reg} + \eta_u S^{(0)}_{r,e} + \sum_{\ell=2} \alpha_u S^{(0)\ell}_{r,e}$, $u_z = u_{z,reg} + \eta_u S^{(0)}_{z,e} + \sum_{\ell=2} \alpha_u S^{(0)\ell}_{z,e}$ et $p = p_{reg} + \eta_p S^{(0)}_{pe} + \sum_{\ell=2} \alpha_p S^{(0)\ell}_{pe}$. D'une part on utilise 2.3.7 pour estimer $\left\| u_r - S^{(0)}_{r,e} \right\|_{\mathcal{X}^1_*}$, $\left\| u_z - S^{(0)}_{z,e} \right\|_{\mathcal{X}^1_1}$ et $\left\| p - S^{(0)}_{pe} \right\|_{L^2_1(\Omega)}$, seul λ change, voir [8, Théorème XI.1.5]. On utilise la même technique que dans la preuve du théorème 2.3.3 d'une part et les inégalités

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^{s+1}_1(\Omega)^2} + \|p\|_{H^s_1(\Omega)^2} \leq c \, \|\boldsymbol{f}\|_{H^{s-1}_1(\Omega)^2}$$

pour déduire (3.2.44).

2) **Cas non homogène**

On utilise 1) et le facteur $\bar{N}_\delta^{\frac{1}{2}} \log \bar{N}_\delta$ qui intervient dans $\inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_\delta} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathbb{Z}}$, donc qui apparaît dans le facteur $\|\boldsymbol{u}\|_{H^{s+1}_1(\Omega)^2}$. En plus on a

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^{s+1}_1(\Omega)^2} + \|p\|_{H^s_1(\Omega)^2} \leq c(\|\boldsymbol{f}\|_{H^{s-1}_1(\Omega)^2} + \|\boldsymbol{g}\|_{H^{s+1}_1(\Omega)^2})$$

et

$$\bar{N}_\delta^{\frac{1}{2}} \log \bar{N}_\delta (N_\delta^{-s} \log N_\delta) \leq c N_\delta^{1-s} \tag{3.2.48}$$

on déduit alors (3.2.45). ■

Théorème 3.2.4 *On suppose que* $\boldsymbol{f} \in H^{s-1}_-(\Omega) \times H^{s-1}_+(\Omega)$ *et* $\boldsymbol{g} \in H^{s+1}_-(\Omega) \times H^{s+1}_+(\Omega)$, *avec* $s > \frac{5}{2}$. *Soit* $\boldsymbol{u}$ *la solution du problème (3.2.2) et* $\boldsymbol{u}_\delta$ *la solution du problème (3.2.10). On distingue deux cas :*

1) ***Cas homogène :*** *on a*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)^2} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}} \sup\{N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1} (\log N_\delta)^\varrho \, E^S_\delta\} \, \|\boldsymbol{f}\|_{H^{s-1}_1(\Omega)^2}. \tag{3.2.49}$$

2) ***Cas non homogène :*** *on a*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)^2} \;&\leq\; c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \beta_\delta^{-1} (\log N_\delta)^\varrho \, N_\delta^{-1} E^S_\delta\} \\ &\qquad (\|\boldsymbol{f}\|_{H^{s-1}_1(\Omega)^2} + \|\boldsymbol{g}\|_{H^{s+1}_1(\Omega)^2}). \end{aligned} \tag{3.2.50}$$

avec ϱ égal à 0 *si la décomposition est conforme et* 1 *sinon.* $N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$, E_δ^S *resp* λ_δ *sont définis dans (3.2.46) resp (2.3.25).*

Preuve On a

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2_1(\Omega)^2} = \sup_{\boldsymbol{h} \in L^2_1(\Omega)^2} \frac{\int_\Omega (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta).\boldsymbol{h}\; r dr dz}{\|\boldsymbol{h}\|_{L^2_1(\Omega)^2}}.$$

Pour toute fonction $\boldsymbol{h}$ dans $L^2_1(\Omega)^2$, on note $\boldsymbol{\chi}_\ell = (\chi_{r,\ell}, \chi_{z,\ell})$ l'unique solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta_r \boldsymbol{\chi}_\ell + \nabla_r \eta_\ell = \boldsymbol{h}_\ell & \textit{dans } \Omega_\ell \\ div_r(\boldsymbol{\chi}_\ell) = 0 & \textit{dans } \Omega_\ell \\ \boldsymbol{\chi}_\ell = 0 & \left\{\begin{array}{l} \text{sur } \partial\Omega_\ell \text{ si } \ell \geq L_0 \\ \text{sur } \Gamma_\ell \text{ si } \ell \leq L_0 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{3.2.51}$$

avec $\boldsymbol{\chi}_\ell \in V^1_{1\diamond}(\Omega_\ell)^2$ si $\ell \geq L_0$ et $\boldsymbol{\chi}_\ell \in V^1_{1\diamond}(\Omega_\ell) \times H^1_{1\diamond}(\Omega_\ell)$ si $\ell \leq L_0$ on note que $\Delta_r\; \boldsymbol{\chi} = \binom{\partial_r^2\chi_{r,\ell} - \frac{1}{r}\partial_r\chi_{r,\ell} - \partial_z^2\chi_{r,\ell}}{\partial_r^2\chi_{z,\ell} - \frac{1}{r}\partial_r\chi_{z,\ell} - \partial_z^2\chi_{z,\ell}}$, $\nabla_r\eta = \binom{\partial_r\eta}{\partial_z\eta}$ et $div_r(\boldsymbol{\chi}_\ell) = \partial_r\chi_{r,\ell} + \frac{1}{r}\chi_{r,\ell} + \partial_z\chi_{z,\ell}$. Du problème (3.2.51) on déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta).\boldsymbol{h}\; r dr dz &= \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \nabla_r(\chi_{r,\ell})\nabla_r(u_r - u_{r\delta}) r dr dz \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} \nabla_r(\chi_{z,\ell})\nabla_r(u_z - u_{z\delta}) r dr dz \\ &\quad - \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta.\boldsymbol{n}_m).[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta] d\tau \\ &= \mathcal{A}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta) - \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta.\boldsymbol{n}_m).[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta] d\tau. \end{aligned}$$

a) On a $\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta.\boldsymbol{n}_m).[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta] d\tau = \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta.\boldsymbol{n}_m)[u_\delta] d\tau$. On utilise 4) de la preuve du théorème 3.2.2. La régularité de $\boldsymbol{u}$ nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} |\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta.\boldsymbol{n}_m)[\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta] d\tau| &\leq \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-1} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} (\|\boldsymbol{\chi}\|_{V^2_1(\Omega_\ell) \times H^2_1(\Omega_\ell)} \\ &\quad + \|\eta\|_{L^2_1(\Omega_\ell)})\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \qquad (3.2.52) \\ &\leq c N_\delta^{-1} (\log N_\delta)\, \|\boldsymbol{h}\|_{L^2_1(\Omega)^2}\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

puisque [8] on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|\boldsymbol{\chi}\|_{V_1^2(\Omega_\ell)\times H_1^2(\Omega_\ell)} + \sum_{\ell=1}^{L} \|\eta\|_{L_1^2(\Omega_\ell)} \leq c\,\|\boldsymbol{h}\|_{L_1^2(\Omega)^2}.$$

On remarque que si la décomposition est conforme on a

$$|\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial\boldsymbol{n}_m} + \eta.\boldsymbol{n}_m)[\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta]d\tau| \leq cN_\delta^{-1}\,\|\boldsymbol{h}\|_{L_1^2(\Omega)^2}\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}}. \tag{3.2.53}$$

b) On pose $\boldsymbol{\chi}$ tel que $\boldsymbol{\chi}_{|\boldsymbol{\Omega_\ell}} = \boldsymbol{\chi}_\ell$, alors $\boldsymbol{\chi} \in V_{1\diamond}^1(\Omega) \times H_{1\diamond}^1(\Omega)$.

Soit $\tilde{\Pi}_N^{-,2,0}$ la projection orthogonale de $V_{1\diamond}^2(\Omega_\ell)$ dans $\mathbb{P}_N^{2,0}(\Omega_\ell)$, où $\mathbb{P}_N^{2,0}(\Omega_\ell)$ est l'ensemble des polynômes dans $\mathbb{P}_N(\Omega_\ell)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega_\ell$, ainsi que leurs dérivées normales. On sait que pour tout $\boldsymbol{\chi} = (\chi_r, \chi_z)$ solution du problème (3.2.51), on associe $\psi \in H_-^{s+1}(\Omega_\ell)$ tel que $\psi = \partial_n\psi = 0$ sur Γ_ℓ si $1 \leq \ell \leq L_0$ et $\psi = \partial_n\psi = 0$ sur $\partial\Omega_\ell$ si $L_0 \leq \ell \leq L$. ψ vérifie $\chi_r = \partial_z\psi$ et $\chi_z = -\frac{1}{r}\partial_r(r\psi)$ voir [8, Remarque IX.1.2].

On pose $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}$ tel que $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1|\Omega_\ell} = (\partial_z\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{-,2,0}\psi, -\frac{1}{r}\partial_r(r\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{-,2,0}\psi))$. On a alors $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1} \in V_{1\diamond}^1(\Omega)\times H_{1\diamond}^1(\Omega)$, en plus $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1} \in \mathbb{V}\cap\mathbb{V}_\delta$ [8, Proposition X.1.4]. Par cette construction on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta) &= \int_\Omega \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{\chi}_{\delta-1} - (\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\chi}_{\delta-1})_\delta \\
&\leq cN_\delta^{-1}\,\|\boldsymbol{f}\|_{H_1^{s-1}(\Omega)^2}\,(\|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbb{Z}}) \\
&\leq cN_\delta^{-1}\,\|\boldsymbol{f}\|_{H_1^{s-1}(\Omega)^2}\,\|\boldsymbol{h}\|_{L_1^2(\Omega)^2}.
\end{aligned} \tag{3.2.54}$$

et

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta) \leq cN_\delta^{-1}\,\|\boldsymbol{h}\|_{L_1^2(\Omega)^2}\,\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}} \tag{3.2.55}$$

puisque

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{\chi}-\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}\right\|_{\mathbb{Z}} &\leq c\sum_{\ell=1}^{L} N_\delta^{-1}\,\|\boldsymbol{\chi}\|_{V_1^2(\Omega_\ell)\times H_1^2(\Omega_\ell)} \\
&\leq cN_\delta^{-1}\,\|\boldsymbol{h}\|_{L_1^2(\Omega)^2}.
\end{aligned}$$

En combinant le théorème 3.2.3 pour majorer $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}}$, avec (3.2.52), (3.2.54) et (3.2.55), on déduit alors le résultat. ■

3.3 Cas général

3.3.1 Problème continu

Dans le cas général $\breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$ ne sont pas axisymétriques, le problème devient :

$$\left\{\begin{array}{rl} -\partial_r^2 u_r^k - \frac{1}{r}\partial_r u_r^k - \partial_z^2 u_r^k + \frac{1+k^2}{r^2} u_r^k + \frac{2ik}{r^2} u_\theta^k + \partial_r p^k = f_r^k & dans\ \Omega, \\ -\partial_r^2 u_\theta^k - \frac{1}{r}\partial_r u_\theta^k - \partial_z^2 u_\theta^k + \frac{1+k^2}{r^2} u_\theta^k - \frac{2ik}{r^2} u_r^k + \frac{ik}{r} p^k = f_\theta^k & dans\ \Omega, \\ -\partial_r^2 u_z^k - \frac{1}{r}\partial_r u_z^k - \partial_z^2 u_z^k + \frac{k^2}{r^2} u_z^k + \partial_z p^k = f_z^k & dans\ \Omega, \\ \partial_r u_r^k + \frac{1}{r} u_r^k + \frac{ik}{r} u_\theta^k + \partial_z u_z^k = 0 & dans\ \Omega, \\ \left(u_r^k, u_\theta^k, u_z^k\right) = \left(g_r^k, g_\theta^k, g_z^k\right) & sur\ \Gamma, \end{array}\right. \tag{3.3.1}$$

où $\boldsymbol{f}^k = (\ f_r^k,\ f_\theta^k,\ f_z^k)$ et $\boldsymbol{g}^k = (g_r^k,\ g_\theta^k,\ g_z^k)$ sont les coefficients de Fourier respectifs de $\breve{\boldsymbol{f}}$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$.

On multiplie par r et on intègre les équations du problème (3.3.1), ensuite on pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) &= \mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} [\frac{1+k^2}{r^2}(u_{r\ell}\bar{w}_{r\ell} + u_{\theta\ell}\bar{w}_{\theta\ell}) + \\ &\qquad \frac{2ik}{r^2}(u_{\theta\ell}\bar{w}_{rl} - u_{r\ell}\bar{w}_{\theta l}) + \frac{k^2}{r^2} u_{z\ell}\bar{w}_{z\ell}] r dr dz, \\ \mathcal{B}_k(\boldsymbol{w}, q) &= \sum_{\ell=1}^{L} \int_{\Omega_\ell} q[\partial_r \bar{w}_{r\ell} + \frac{1}{r}(\bar{w}_{r\ell} - ik\ \bar{w}_{\theta l}) + \partial_z \bar{w}_{z\ell}] r dr dz, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

avec $\boldsymbol{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ et $\boldsymbol{w} = (w_r, w_\theta, w_z)$ et $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ est définie par

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = a(u_r, v_r) + a(u_\theta, v_\theta) + a(u_z, v_z).$$

Alors on a à résoudre pour chaque k :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \left(\boldsymbol{u}^k, p^k\right) \text{ dans } \mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega) \times L^2_1(\Omega), \\ \text{avec } \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{g}^k \text{ dans } \mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega), \text{ tel que} \\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega),\ \mathcal{A}_k\left(\boldsymbol{u}^k, \boldsymbol{v}\right) + \mathcal{B}_k\left(\boldsymbol{v}, q^k\right) = \left\langle \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{v}\right\rangle, \\ \forall q \in L^2_1(\Omega),\quad \mathcal{B}_k\left(\boldsymbol{u}^k, q\right) = 0. \end{array}\right. \tag{3.3.3}$$

Pour l'existence et l'unicité voir $[8, Chapitre IX]$.

3.3.2 Problème discret

La discrétisation du problème (3.3.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \left(\boldsymbol{u}_\delta^k, p_\delta^k\right) \text{ dans } \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega) \times M_\delta(\Omega), \\ \text{avec } \boldsymbol{u}_\delta^k - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{g}^k \text{ dans } \mathbb{X}_{k,\delta}^\diamond(\Omega), \text{ tel que} \\ \forall \boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}^\diamond(\Omega),\ \mathcal{A}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{u}_\delta^k, \boldsymbol{v}_\delta\right) + \mathcal{B}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{v}_\delta, p_\delta^k\right) = (\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{v}_\delta)_\delta, \\ \forall q_\delta \in M_\delta(\Omega), \quad \mathcal{B}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{u}_\delta^k, q_\delta\right) = 0. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta) &= \mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta) \\ &\quad + \left(1+k^2\right)\left[\left(r^{-1}u_{r\delta}, r^{-1}v_{r\delta}\right)_\delta + \left(r^{-1}u_{\theta\delta}, r^{-1}v_{\theta\delta}\right)_\delta\right] \\ &\quad + 2ik\left[\left(r^{-1}u_{\theta\delta}, r^{-1}v_{r\delta}\right)_\delta - \left(r^{-1}u_{r\delta}, r^{-1}v_{\theta\delta}\right)_\delta\right] \\ &\quad + k^2\left(r^{-1}u_{z\delta}, r^{-1}v_{z\delta}\right)_\delta, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

et

$$\mathcal{B}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, q_\delta) = b_\delta(v_{r\delta}, v_{z\delta}, q_\delta) + ik\left(q_\delta, r^{-1}v_{\theta\delta}\right)_\delta$$

où

$$\boldsymbol{u}_\delta = (u_{r\delta}, u_{\theta\delta}, u_{z\delta}), \boldsymbol{v}_\delta = (v_{r\delta}, v_{\theta\delta}, v_{z\delta}),$$

Les espaces $\mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)$ et $\mathbb{X}_{k,\delta}^\diamond(\Omega)$ sont définis par :

$$\mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega) = \{(v_{r\delta}, v_{\theta\delta}, v_{z\delta}) \in X_\delta(\Omega) \times X_\delta(\Omega) \times X_\delta^*(\Omega);$$
$$v_{r\delta} + ikv_{\theta\delta} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \text{ si } k = \pm 1\}$$

et

$$\mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega) = X_\delta^*(\Omega)^3 \text{ si } |k| \geq 2, \text{ on pose aussi}$$
$$\mathbb{X}_{k,\delta}^\diamond(\Omega) = \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega) \cap H_{1\diamond}^1(\Omega)^3.$$

On rappelle que les normes $\|.\|_{\mathcal{X}_1^1}$ et $\|.\|_{\mathcal{X}_*^1}$ sont données par $\|v_\delta\|_{\mathcal{X}_1^1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|_{H_1^1(\Omega_\ell)}^2)^{\frac{1}{2}}$, et $\|v_\delta\|_{\mathcal{X}_*^1} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|v_\ell\|_{H_{(k)}^1(\Omega_\ell)}^2)^{\frac{1}{2}}$. On définit la norme $\|.\|_{\mathcal{L}_{-1}^2}$ par

$$\|.\|_{\mathcal{L}_{-1}^2} = (\sum_{\ell=2}^{L} \|.\|_{L_{-1}^2(\Omega_\ell)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A l'aide de ces trois normes on définit les normes produits suivantes :

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathcal{X}_3} &= \|v_{r\delta}\|_{\mathcal{X}_1^1} + \|v_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}_1^1} + \\
&\quad \|v_{r\delta} + ikv_{\theta\delta}\|_{\mathcal{L}_{-1}^2} + \|v_{z\delta}\|_{\mathcal{X}_*^1} \\
\text{si } k &= \pm 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathcal{X}_3} &= \|v_{r\delta}\|_{\mathcal{X}_*^1} + \|v_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}_*^1} + \|v_{z\delta}\|_{\mathcal{X}_*^1} \\
\text{si } |k| &\geq 2.
\end{aligned}$$

Sur l'espace $\mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)$, on utilise la norme induite $\|.\|_{\mathcal{X}_3}$.

Remarque 3.3.1 *On remarque que la norme* $\|.\|_{\mathcal{X}_3}$ *et la norme* $\|.\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega)}$ $(s = 1)$ *définies dans le théorème 1.6.2 sont équivalentes sur* $\mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)$.

On définit aussi l'espace

$$\mathbb{V}_{k,\delta} = \{v_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta},\ \mathcal{B}_{k,\delta}(v_\delta, q_\delta) = 0, \forall q_\delta \in M_\delta\}. \tag{3.3.6}$$

Pour montrer que le problème (3.3.4) est bien posé, il suffit de montrer les propriétés suivantes :

1) $\mathcal{A}_{k,\delta}(.,.)$ est continue sur $\mathbb{X}_{k,\delta}$ avec une norme indépendante de δ.

2) La forme $\mathcal{B}_{k,\delta}(.,.)$ est continue sur $\mathbb{X}_{k,\delta} \times M_\delta$ et la constante de continuité est indépendante de δ.

3) $\mathcal{A}_{k,\delta}(.,.)$ est coercive sur $\mathbb{V}_{k,\delta}$ avec une constante de coercivité indépendante de δ et $\mathcal{B}_{k,\delta}(.,.)$ vérifie une condition inf-sup avec une constante indépendante de δ.

Remarque 3.3.2 *La condition* $\mathcal{B}_{k,\delta}(v_\delta, q_\delta) = 0$ *est équivalente à :*

$$\partial_r u_r^k + \frac{1}{r}u_r^k + \frac{ik}{r}u_\theta^k + \partial_z u_z^k = 0$$

et on note

$$div_k \boldsymbol{u}^k = \partial_r u_r^k + \frac{1}{r}u_r^k + \frac{ik}{r}u_\theta^k + \partial_z u_z^k \tag{3.3.7}$$

Proposition 3.3.1 *Pour k fixé, il existe β et λ indépendantes de k qui vérifient :*

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta \in \; & \mathbb{X}_{k,\delta} \\ \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta) \quad \leq \quad & \beta \|\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathcal{X}_3} \|\boldsymbol{v}_\delta\|_{\mathcal{X}_3} \\ \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{u}_\delta) \quad \geq \quad & \lambda \|\boldsymbol{u}_\delta\|^2_{\mathcal{X}_3} \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Preuve 1) Si $|k| \geq 2$, on a :

$$|\mathcal{A}_\delta(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta)| \leq c_1(\|u_{r\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{r\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} + \|u_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} + \|u_{z\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{z\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*}). \tag{3.3.9}$$

Et pour les autres termes on a

$$\begin{aligned} \left|\left(1+k^2\right)\left[\left(r^{-1}u_{r\delta}, r^{-1}v_{r\delta}\right)_\delta + \left(r^{-1}u_{\theta\delta}, r^{-1}v_{\theta\delta}\right)_\delta\right]\right| \;\leq\; & c(\|u_{r\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{r\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \\ & + \|u_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*}) \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

et

$$\begin{aligned} \left|2ik\left[\left(r^{-1}u_{\theta\delta}, r^{-1}v_{r\delta}\right)_\delta - \left(r^{-1}u_{r\delta}, r^{-1}v_{\theta\delta}\right)_\delta\right]\right| \;\leq\; & c'(\|u_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{r\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \\ & + \|u_{r\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{\theta\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*}) \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

et

$$\left|k^2\left(r^{-1}u_{z\delta}, r^{-1}v_{z\delta}\right)_\delta\right| \leq c'' \|u_{z\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \|v_{z\delta}\|_{\mathcal{X}^1_*} \tag{3.3.12}$$

On combine (3.3.9-3.3.12) pour montrer la continuité de $\mathcal{A}_{k,\delta}$.

Pour la coercivité on utilise la définition de $\mathcal{A}_{k,\delta}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{u}_\delta) &= a_\delta(u_{r\delta}, u_{r\delta}) + \left(1+k^2\right)\left(r^{-1}u_{r\delta}, r^{-1}u_{r\delta}\right)_\delta \\ &\quad + a_\delta(u_{\theta\delta}, u_{\theta\delta}) + \left(1+k^2\right)\left(r^{-1}u_{\theta\delta}, r^{-1}u_{\theta\delta}\right)_\delta \\ &\quad + a_\delta(u_{z\delta}, u_{z\delta}) + k^2\left(r^{-1}u_{z\delta}, r^{-1}u_{z\delta}\right)_\delta \\ &\geq C(\|u_{r\delta}\|^2_{\mathcal{X}^1_*} + \|u_{\theta\delta}\|^2_{\mathcal{X}^1_*} + \|u_{z\delta}\|^2_{\mathcal{X}^1_*}), \end{aligned}$$

finalement on a le résultat en utilisant l'inégalité $(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

2) Si $|k| = 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta\right) &= \mathcal{A}_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta\right)\\ &+2(r^{-1}\{u_{r\delta} + iku_{\theta\delta}\}, r^{-1}\{v_{r\delta} + ikv_{\theta\delta}\})_\delta\\ &+(r^{-1}u_{z\delta}, r^{-1}v_{z\delta})_\delta.\end{aligned}$$

En utilisant (3.3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\left|(r^{-1}\{u_{r\delta} + iku_{\theta\delta}\}, r^{-1}\{v_{r\delta} + ikv_{\theta\delta}\})_\delta\right| &\leq \left\|u_{r\delta} + iku_{\theta\delta}\right\|_{\mathcal{L}^2_{-1}} \left\|v_{r\delta} + ikv_{\theta\delta}\right\|_{\mathcal{L}^2_{-1}}\\ \left|(r^{-1}u_{z\delta}, r^{-1}v_{z\delta})_\delta\right| &\leq \left\|u_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}^1_*} \left\|v_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}^1_*}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{A}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{v}_\delta\right) \leq \beta \left\|\boldsymbol{u}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3} \left\|\boldsymbol{v}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3}.$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{u}_\delta\right) &= \mathcal{A}_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{u}_\delta\right)\\ &+2(r^{-1}\{u_{r\delta} + iku_{\theta\delta}\}, r^{-1}\{u_{r\delta} + iku_{\theta\delta}\})_\delta\\ &+(r^{-1}u_{z\delta}, r^{-1}u_{z\delta})_\delta\\ &= \mathcal{A}_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{u}_\delta\right) + 2\left\|u_{r\delta} + iku_{\theta\delta}\right\|_{\mathcal{L}^2_{-1}} + \left\|u_{z\delta}\right\|_{\mathcal{L}^2_{-1}}\end{aligned}$$

On a alors $\mathcal{A}_{k,\delta}\left(\boldsymbol{u}_\delta, \boldsymbol{u}_\delta\right) \geq \lambda \left\|\boldsymbol{u}_\delta\right\|^2_{\mathcal{X}_3}.$ ■

Proposition 3.3.2 *Pour k fixé, il existe c indépendant de k et de δ tels que*

$$\forall q_\delta \in M_\delta(\Omega),\ \forall \boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)$$
$$\mathcal{B}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, q_\delta) \leq c||\boldsymbol{v}_\delta||_{\mathcal{X}_3}||q_\delta||_{L^2_1(\Omega)}.$$

Preuve *On a*

$$\mathcal{B}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, q_\delta) = b_\delta(v_{r\delta}, v_{z\delta}; q_\delta) + ik(v_{\theta\delta}, q_\delta)_\delta.$$

Si $|k| \geq 2$, on a

$|b_\delta(v_{r\delta}, v_{z\delta}; q_\delta)| \leq c_1(||v_{r\delta}||_{\mathcal{X}^1_*} + ||v_{z\delta}||_{\mathcal{X}^1_*})||q_\delta||_{L^2_1(\Omega)}$ *et* $|ik(v_{\theta\delta}, q_\delta)_\delta| \leq c_2||v_{\theta\delta}||_{\mathcal{X}^1_*}||q_\delta||_{L^2_1(\Omega)}$

Si $|k| = 1$, on a

$|b_\delta(v_{r\delta}, v_{z\delta}; q_\delta)| \leq c_1(||v_{r\delta}||_{\mathcal{X}^1_1} + ||v_{z\delta}||_{\mathcal{X}^1_*})||q_\delta||_{L^2_1(\Omega)}$ *et* $|ik(v_{\theta\delta}, q_\delta)_\delta| \leq c_2||v_{\theta\delta}||_{\mathcal{X}^1_1}||q_\delta||_{L^2_1(\Omega)}$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.3.3 *Il existe c indépendant de δ et de k, (avec $|k| \leq K$) tel que :*

$$\forall q_\delta \in M_\delta(\Omega), \sup_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)} \frac{\mathcal{B}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, q_\delta)}{||\boldsymbol{v}_\delta||_{\mathcal{X}_3}} \geq c\beta_{K,\delta}||q_\delta||_{L^2_1(\Omega)}$$

où

$$\beta_{K,\delta} = K^{-1} N_\delta^{-\frac{1}{2}} (\log N_\delta)^{-1}.$$

Preuve Soit $q_\delta \in M_\delta(\Omega)$. On a $q_\delta|_{\Omega_\ell} \in \mathbb{P}_{N_\ell - 2}(\Omega_\ell)$, or d'après [8, Proposition X.2.14 et (X.2.32)] et [8, (XI.1.51)] on peut construire sur chaque sous domaine Ω_ℓ, $\boldsymbol{v}_{N_\ell} \in \mathbb{P}^\circ_{N_\ell}(\Omega_\ell)^3$, tel que

$$\forall q \in \mathbb{P}_{N_\ell - 2}(\Omega_\ell), \sup_{\boldsymbol{v}_{N_\ell} \in \mathbb{P}^\circ_{N_\ell}(\Omega_\ell)^3} \frac{\mathcal{B}_{k,N_\ell}(\boldsymbol{v}_{N_\ell}, q)}{||\boldsymbol{v}_{N_\ell}||_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)}} \geq cK^{-1} N_\ell^{-\frac{1}{2}} (\log N_\ell)^{-1} ||q||_{L^2_1(\Omega_\ell)} \quad (3.3.13)$$

On pose ensuite $\boldsymbol{v}_\delta$ avec $\boldsymbol{v}_\delta|_{\Omega_\ell} = \boldsymbol{v}_{N_\ell}$ et on a le résultat. ■

3.3.3 Estimation d'erreurs

Proposition 3.3.4 *Soit $(\boldsymbol{u}^k, p^k)$ la solution du problème (3.3.3) et $(\boldsymbol{u}^k_\delta, p^k_\delta)$ la solution du problème (3.3.4). Alors on a :*

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3} + \beta_{K,\delta}||p^k - p^k_\delta||_{L^2_1(\Omega)} \leq\ & c\{ \inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_{k,\delta}} \left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{v}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3} \\
& + \sup_{\boldsymbol{w}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)} \frac{\mathcal{A}_k(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathcal{X}_3}} \\
& + \inf_{q_\delta \in M_\delta} \left\|p^k - q^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega)} \\
& + \sup_{\boldsymbol{z}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{f}^k \boldsymbol{z}_\delta(r,z)\, r dr dz - \left(\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{z}_\delta\right)_\delta}{\|\boldsymbol{z}_\delta\|_{\mathcal{X}_3}} \\
& + \sup_{\boldsymbol{y}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)} \frac{\sum_{\gamma^-_m \in \mathcal{S}} \int_{\gamma^-_m} \{-\frac{\partial \boldsymbol{u}^k}{\partial \boldsymbol{n}_m} + p^k \boldsymbol{n}(\tau)\}. [\boldsymbol{y}_\delta](\tau)\, d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathcal{X}_3}} \}.
\end{aligned}$$

Preuve La preuve est classique. On utilise la démarche des preuves des propositions 3.2.2 et 3.2.4, et on remplace $(\mathcal{A}(.,.)$ resp $\mathcal{A}_\delta(.,.)$ resp $b_\delta(.,.)$ par $\mathcal{A}_k(.,.)$ resp $\mathcal{A}_{k,\delta}(.,.)$ resp $\mathcal{B}_{k,\delta}(.,.))$, la norme $\|.\|_{\mathbb{Z}}$ par $\|.\|_{\mathcal{X}_3}$ et l'espace $\mathbb{V}_\delta$ par $\mathbb{V}_{k,\delta}$. ■

Proposition 3.3.5 *Soit $\boldsymbol{u}^k = (u_r^k, u_\theta^k, u_z^k)$ la solution du problème 3.2.3, on suppose que $\boldsymbol{u}^k|_{\Omega_\ell} \in \mathbf{H}_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)$ alors il existe $\boldsymbol{v}_\delta$ dans $\mathbb{V}_{k,\delta}$ et c une constante positive tels que :*

$$\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{v}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3} \leq c\lambda_\delta^{\frac{3}{4}} \sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}_\ell^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)}. \tag{3.3.14}$$

Preuve Soit $\boldsymbol{u}^k = (u_r^k, u_\theta^k, u_z^k)$ la solution du problème (3.2.2). On pose $\boldsymbol{v}_\delta^k$ tel que $v_{r\delta}^k$ et $v_{z\delta}^k$ sont déduits de la construction faite dans la preuve de la proposition 3.2.3, c'ést-à-dire pour construire $v_{r\delta}^k$, on pose z_δ^1 tel que $z_\ell^1 = \tilde{\Pi}_{N_\ell}^{*,2} u_{r\ell}$, ensuite on pose

$$z_\delta^2 = \sum_{\mu=1}^{M^+} \sum_{e \in \mathcal{C}_\mu^+} (u_r - z^1_{\delta|\Omega_\mu^+})(e) \tilde{\Phi}^*_{\mu,e}, \;\; z_\delta^{12} = z_\delta^1 + z_\delta^2, \; \sigma_{\gamma_m^-} = \tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- - 2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-},$$

et

$$\sigma^n_{\gamma_m^-} = \partial_n \left(\tilde{\pi}^{*,2}_{N_m^- - 2}(z^{12}_{\delta|\gamma_m^+} - z^{12}_{\delta|\gamma_m^-})_{|\gamma_m^-}\right), \quad u^k_{r\delta} = z_\delta^1 + z_\delta^2 + \sum_{m=1}^{M^-} \tilde{\mathcal{R}}^{2,\gamma_m^-}(\sigma_{\gamma_m^-}, \sigma^n_{\gamma_m^-})$$

On définit $v_{z\delta}^k$ de la même façon en changeant v_r par v_z. On pose ensuite

$$v_{\theta\delta}^k = -ik(\partial_r(r v_{r\delta}^k) + \partial_z(r v_{z\delta}^k)). \tag{3.3.15}$$

On voit que par cette construction, que $v_{r\delta}^k$, $v_{z\delta}^k$ et $v_{\theta\delta}^k$ sont nuls sur le bord et vérifient la condition (3.3.7). Ensuite on a

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u_r^k - v_{r\delta}^k\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq c\lambda_\delta{}^{\frac{3}{4}} \sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|u_r^k\right\|_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)},$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u_z^k - v_{z\delta}^k\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq c\lambda_\delta{}^{\frac{3}{4}} \sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|u_r^k\right\|_{H^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)}.$$

Enfin la condition

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u_\theta^k - v_{\theta\delta}^k\right\|_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq c\lambda_\delta{}^{\frac{3}{4}} \sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}^k\right\|_{\mathbf{H}^{s_\ell+1}_{(k)}(\Omega_\ell)}$$

se déduit de la condition (3.3.15). ■

Remarque 3.3.3 *1) Dans la preuve, on utilise toujours la condition $K \leq N_\delta$*

2) Le terme $\mathcal{A}_k(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)$ s'annule si on cherche $\boldsymbol{v}_\delta$ dans $\mathbb{V}_{k,\delta} \cap \mathbb{P}_{\delta-1}$.

Théorème 3.3.1 *Soit $(\boldsymbol{u}^k, p)$ la solution du problème (3.2.2) et $\boldsymbol{u}_\delta^k$ la solution du problème (3.2.10). On suppose que $\boldsymbol{u}^k|_{\Omega_\ell} \in \mathbf{H}_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)$, $p|_{\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)$ avec $s_\ell > \frac{1}{2}$ ($s_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$) et $\boldsymbol{f}|_{\boldsymbol{\Omega_\ell}} \in \mathbf{H}_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)$ avec $\sigma_\ell > 1$ ($\sigma_\ell > \frac{3}{2}$ si $\ell \leq L_0$). Alors on distingue deux cas :*

1) ***Cas homogène :*** *Il existe une constante positive c telle qu'on a*

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3} + \beta_{K,\delta}||p^k - p_\delta^k||_{L_1^2(\Omega)} \quad &\leq \quad c\{(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \log(N_\ell)^{\varrho_\ell} \left\|\boldsymbol{u}^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L} \log(N_\ell)^{\varrho_\ell} \left\|p^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell}(\Omega_\ell)} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{H_{(k)}^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^3}\}.\end{aligned}$$

et ϱ_ℓ est égal à 1 si l'un des côtés de Ω_ℓ est γ_m^- et intersecte au moins deux sous-domaines $\bar{\Omega}_{\ell'}, \ell' \neq \ell$ et 0 sinon. Et λ_ℓ est donné dans (2.3.38).

2) ***Cas non homogène :*** *Il existe une constante positive c telle qu'on a*

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3} + \beta_{K,\delta}||p^k - p_\delta^k||_{L_1^2(\Omega)} \quad &\leq \quad c\{(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \beta_\delta^{-1} \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \left\|\boldsymbol{u}^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} (\log N_\ell)^{\varrho_\ell} \left\|p^k\right\|_{H_{(k)}^{s_\ell}(\Omega_\ell)} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{H_{(k)}^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^3}\}.\end{aligned}$$

Preuve 1) On a $\sup\limits_{\boldsymbol{w}_\delta \in \mathbb{X}_{k,\delta}(\Omega)} \frac{\mathcal{A}_k(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathcal{X}_3}} \leq c \sum\limits_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}_\ell^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s_\ell}(\Omega_\ell)}$.
En effet en utilisant la remarque 3.3.1 et (3.3.8) on a

$$\mathcal{A}_k(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) - \mathcal{A}_{k,\delta}(\boldsymbol{v}_\delta, \boldsymbol{w}_\delta) \leq \beta \left\|\boldsymbol{v}_\delta - \boldsymbol{x}_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3} \left\|\boldsymbol{w}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3}.$$

et

$$\left\|\boldsymbol{v}_\delta - \boldsymbol{x}_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3} \left\|\boldsymbol{w}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3} \leq (\left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{v}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3} + \left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{x}_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3}) \left\|\boldsymbol{w}_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3}.$$

a) Si $|k| \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{x}_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3} &= (\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u_{r\delta}^k - x_{r\delta-1}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +(\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u_{\theta\delta}^k - x_{\theta\delta-1}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}} \\ &\quad +(\sum_{\ell=1}^{L} \left\|u_{z\delta}^k - x_{z\delta-1}\right\|^2_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(*) Si $|k| > s$, la norme $\|.\|_{H^s_{(k)*}(\Omega_\ell)} = \|.\|_{H^s_{(k)}(\Omega_\ell)}$. On pose alors $\boldsymbol{x}_{r\delta-1} = \Pi^{(k)}_{N_\ell-1} u^k_r$, $\boldsymbol{x}_{\theta\delta-1} = \Pi^{(k)}_{N_\ell-1} u^k_\theta$ et $\boldsymbol{x}_{z\delta-1} = \Pi^{(k)}_{N_\ell-1} u^k_z$ et on applique [8, Proposition V.4.2] pour déduire que $\left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{x}_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathbf{H}^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}$.

(**) Si $|k| \leq s$, la norme $\|.\|_{H^s_{(k)*}(\Omega_\ell)} = (\|.\|_{H^s_1(\Omega_\ell)}$ ou $\|.\|_{V^s_1(\Omega_\ell)})$ suivant la parité de k et s. Alors on a :

$$\|.\|_{H^s_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq c(s)\, \|.\|_{H^s_{(k)*}(\Omega_\ell)} .$$

D'où $\left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{x}_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathbf{H}^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}$.

Le cas $|k| = 1$ se traite de la même façon.

On peut aussi étendre le résultat [8, lemme X.1.9] pour déduire qu'il existe un operateur $\tilde{\Pi}^{div}_{N_\ell-1}$ qui satisfait

$$||\boldsymbol{v} - \tilde{\Pi}^{div}_{N_\ell-1}\boldsymbol{v}||_{H^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \leq cN^{-s_\ell}\, \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{H}^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}$$

avec $\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell) \cap \mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)$. On pose alors $\boldsymbol{x}_{\delta-1|\Omega_\ell} = \tilde{\Pi}^{div}_{N_\ell-1}\boldsymbol{u}^k_{|\Omega_\ell}$, on somme sur ℓ et on utilise la remarque 3.3.1 pour conclure. Les majorations

$\sup_{\boldsymbol{z}_\delta\in\mathbb{X}_{k,\delta}} \frac{\int_\Omega \boldsymbol{f}^k \boldsymbol{z}_\delta(r,z) r dr dz - \left(\boldsymbol{f}^k,\boldsymbol{z}_\delta\right)_\delta}{\|\boldsymbol{z}_\delta\|_{\mathcal{X}_3}} \leq \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-\sigma_\ell} \left\|\boldsymbol{f}^k_\ell\right\|_{\mathbf{H}^{\sigma_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}$,

$\inf_{q_\delta\in M_\delta} \left\|p^k - q^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega)} \leq \sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\|p^k_\ell\right\|_{H^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}$,

et $\sup_{\boldsymbol{y}_\delta\in\mathbb{X}_{k,\delta}} \frac{\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \{-\frac{\partial \boldsymbol{u}^k}{\partial \boldsymbol{n}} + p^k \boldsymbol{n}(\tau)\}.[\boldsymbol{y}_\delta](\tau) d\tau}{\|\boldsymbol{y}_\delta\|_{\mathcal{X}_3}} \leq c\sum_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell}(\log N_\ell)^{\varrho_\ell}(\left\|p^k_\ell\right\|_{H^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)} + \left\|\boldsymbol{u}^k_\ell\right\|_{\mathbf{H}^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)})$.

sont prouvés exactement comme celles du théorème 3.2.2, avec la remarque que

$$\|.\|_{H^{s_\ell}_1(\Omega_\ell)} \leq \|.\|_{H^{s_\ell}_{(k)*}(\Omega_\ell)} \leq c\, \|.\|_{H^{s_\ell}_{(k)}(\Omega_\ell)}\, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

5) Dans le cas homogène, d'après la proposition 3.3.5 on a

$$\inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_{k,\delta}} \left\| \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{v}_\delta \right\|_{\mathcal{X}_3} \leq c\lambda^{\frac{3}{4}} N_\delta^{-s} \left\| \boldsymbol{u}^k \right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s+1}(\Omega)} .$$

5.a) Dans le cas non homogène, on utilise (3.2.43) pour déduire que

$$\inf_{\boldsymbol{v}_\delta \in \mathbb{V}_{k,\delta}} \left\| \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{v}_\delta \right\|_{\mathcal{X}_3} \leq c\lambda^{\frac{1}{2}} N_\delta^{-s} \beta_\delta^{-1} \left\| \boldsymbol{u}^k \right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s+1}(\Omega)} .$$

où $\beta_\delta^{-1} = \bar{N}_\delta^{\frac{1}{2}} (\log \bar{N}_\delta)$. ∎

Théorème 3.3.2 *On suppose que $\boldsymbol{f}^k \in \mathbf{H}_{(k)}^{s-1}(\Omega)$ et $\boldsymbol{g}^k \in \mathbf{H}_{(k)}^{s+1}(\Omega)$ avec $s > \frac{5}{2}$. Soit $(\boldsymbol{u}^k, p^k)$ les solutions du problème (3.2.2) et (u_δ^k, p_δ^k) du problème (3.3.4). On distingue alors deux cas*

1) ***Cas homogène :*** *Il existe une constante positive c telle que l'on a :*

$$\left\| \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k \right\|_{\mathcal{X}_3} + \beta_{K,\delta} ||p^k - p_\delta^k||_{L_1^2(\Omega)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}} \sup\{N_\delta^{1-s}, E_\delta^S\} \left\| \boldsymbol{f}^k \right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s-1}(\Omega)} \quad (3.3.16)$$

2) ***Cas non homogène :*** *Il existe une constante positive c telle que l'on a :*

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k \right\|_{\mathcal{X}_3} + \beta_{K,\delta} ||p^k - p_\delta^k||_{L_1^2(\Omega)} \quad \leq \quad & c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \beta_\delta^{-1} E_\delta^S\} \quad (3.3.17) \\ & (\left\| \boldsymbol{f}^k \right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s-1}(\Omega)} + \left\| \boldsymbol{g}^k \right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s+1}(\Omega)}) \end{aligned}$$

où $N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$, E_δ^S resp λ_δ sont définis dans (3.2.46) resp (2.3.25).

Preuve On écrit $u_r^k = u_{r,reg}^k + \eta_u S_{r,e}^{(k)} + \sum_{\ell=2} \alpha_u S_{r,e}^{(k)\ell}$, $u_z^k = u_{z,reg}^k + \eta_u S_{z,e}^{(k)} + \sum_{\ell=2} \alpha_u S_{z,e}^{(k)\ell}$ et $p^k = p_{reg}^k + \eta_p S_{pe}^{(k)} + \sum_{\ell=2} \alpha_p S_{pe}^{(k)\ell}$. D'une part on combine le théorème 2.4.7 et [8, Théorème XI.1.12] pour estimer $\left\| u_r^k - S_{r,e}^{(k)} \right\|_{\mathcal{X}_*^1}$, $\left\| u_z^k - S_{z,e}^{(k)} \right\|_{\mathcal{X}_*^1}$ et $\left\| p^k - S_{pe}^{(k)} \right\|_{L_1^2(\Omega)}$ d'autre part on utilise le résultat du théorème 3.3.1 et (3.2.48) pour conclure. ∎

Théorème 3.3.3 *On suppose que $\boldsymbol{f} \in \mathbf{H}_{(k)}^{s-1}(\Omega)$ et $\boldsymbol{g} \in \mathbf{H}_{(k)}^{s+1}(\Omega)$, avec $s > \frac{5}{2}$. Soit $\boldsymbol{u}$ la solution du problème (3.2.2) et $\boldsymbol{u}_\delta$ la solution du problème (3.2.10). On distingue deux cas :*

1) ***Cas homogène :*** *on a*

$$\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{L_1^2(\Omega)^3} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}} \sup\{N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}(\log N_\delta)^\varrho E_\delta^S\} \left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s-1}(\Omega)}. \qquad (3.3.18)$$

2) ***Cas non homogène :*** *on a*

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{L_1^2(\Omega)^3} &\leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}\beta_\delta^{-1}(\log N_\delta)^\varrho E_\delta^S\} \qquad (3.3.19)\\ &\qquad (\left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s-1}(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{g}^k\right\|_{\mathbf{H}_{(k)}^{s+1}(\Omega)}).\end{aligned}$$

avec $\varrho = 0$ si la décomposition est conforme et 1 sinon. $N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$ et E_δ^S resp λ_δ sont définis dans (3.2.46) resp (2.3.25).

Preuve On a

$$\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{L_1^2(\Omega)^3} = \sup_{\boldsymbol{h}\in L_1^2(\Omega)^3} \frac{\left\langle \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k, \boldsymbol{h}\right\rangle}{\|\boldsymbol{h}\|_{L_1^2(\Omega)^3}}. \qquad (3.3.20)$$

Pour toute fonction $\boldsymbol{h}$ dans $L_1^2(\Omega)^3$, on note $(\boldsymbol{\chi}^k, \eta^k)$ l'unique solution dans $\mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega_\ell) \times L_1^2(\Omega_\ell)$ du problème

$$\left\{\begin{array}{lr}
-\partial_r^2\chi_{r,\ell}^k - \frac{1}{r}\partial_r\chi_{r,\ell}^k - \partial_z^2\chi_{r,\ell}^k + \frac{1+k^2}{r^2}\chi_{r,\ell}^k + \frac{2ik}{r^2}\chi_{\theta,\ell}^k + \partial_r\eta_\ell^k & = h_{r,\ell}^k \text{ dans } \Omega_\ell\\
-\partial_r^2\chi_{\theta,\ell}^k - \frac{1}{r}\partial_r\chi_{\theta,\ell}^k - \partial_z^2\chi_{\theta,\ell}^k + \frac{1+k^2}{r^2}\chi_{\theta,\ell}^k - \frac{2ik}{r^2}\chi_{r,\ell}^k + \frac{ik}{r}\eta_\ell^k & = h_{\theta,\ell}^k \text{ dans } \Omega_\ell\\
-\partial_r^2\chi_{z,\ell}^k - \frac{1}{r}\partial_r\chi_{z,\ell}^k - \partial_z^2\chi_{z,\ell}^k + \frac{k^2}{r^2}\chi_{z,\ell}^k + \partial_z\eta_\ell^k & = h_{z,\ell}^k \text{ dans } \Omega_\ell\\
\partial_r\chi_{r,\ell}^k + \frac{1}{r}\chi_{r,\ell}^k + \frac{ik}{r}\chi_{\theta,\ell}^k + \partial_z\chi_{z,\ell}^k & = 0 \text{ dans } \Omega_\ell\\
\boldsymbol{\chi}^k = 0 \left\{\begin{array}{l}\text{sur } \partial\Omega_\ell \text{ si } \ell \geq L_0\\ \text{sur } \Gamma_\ell \text{ si } \ell \leq L_0\end{array}\right. &
\end{array}\right. \qquad (3.3.21)$$

En utilisant (3.3.3), on déduit que $(\boldsymbol{\chi}^k, \eta^k)$ appartient à $\mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega) \times L_1^2(\Omega)$ et

$$\mathcal{A}_k\left(\boldsymbol{\chi}^k, \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right) - \sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}^k}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta^k \boldsymbol{n}_m\right).[\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k]\,d\tau = \left\langle \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k, \boldsymbol{h}^k\right\rangle$$

avec $\mathcal{A}_k(.,.)$ défini dans (3.3.2).

a) Pour majorer le terme $\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} (\frac{\partial \boldsymbol{\chi}^k}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta^k \boldsymbol{n}_m).[\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k]d\tau$ on procède de la même façon que dans (3.2.52). On a :

$$\left|\sum_{\gamma_m^- \in \mathcal{S}} \int_{\gamma_m^-} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}^k}{\partial \boldsymbol{n}_m} + \eta^k \boldsymbol{n}_m\right).[\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k]\,d\tau\right| \leq c N_\delta^{-1}(\log N_\delta) \left\|\boldsymbol{h}^k\right\|_{L_1^2(\Omega)^3} \left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3}.$$

et

$$\left|\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}(\frac{\partial\boldsymbol{\chi}^k}{\partial\boldsymbol{n}_m}+\eta^k\boldsymbol{n}_m).[\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k]d\tau\right|\leq cN_\delta^{-1}\left\|\boldsymbol{h}^k\right\|_{L^2_1(\Omega)^3}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3}.$$

dans le cas conforme.

b) Pour majorer le terme $\mathcal{A}_k\left(\boldsymbol{\chi}^k,\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k\right)$, on utilise la même démarche que dans (2) de la preuve du théorème 3.2.4. On a

$$\mathcal{A}_k\left(\boldsymbol{\chi}^k,\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k\right)=\mathcal{A}_k(\boldsymbol{\chi}^k-\boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\delta-1}}^{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k)+\mathcal{A}_k(\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k,\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k),$$

On choisit $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}$ tel que $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1|\Omega_\ell}=\left(\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{div(r)}\circ\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{div(z)}\right)(\boldsymbol{\chi}_\ell)$, $\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{div(r)}$ resp $\tilde{\Pi}_{N_\ell-1}^{div(z)}$ sont déduits de $\Pi_{N_\ell-1}^{div(r)}$ resp $\Pi_{N_\ell-1}^{div(z)}$ par translation et homothétie et où $\Pi_N^{div(r)}$ est l'opérateur de projection de $\mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega)$ dans l'ensemble des fonctions qui sont des polynômes de degré inférieur à N dans la direction r, et $\Pi_N^{div(z)}$ est l'opérateur de projection de $\mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega)$ dans l'ensemble des polynômes de degré inférieur à N dans la direction z. Et qui sont en plus à divergence nulle. Avec un tel choix $\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}\in\mathbf{H}^1_{(k)\diamond}(\Omega)\cap\mathbb{V}_{k,\delta}\cap\mathbb{V}_k$, et on a

$$\mathcal{A}_k(\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k,\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k)=\left\langle\boldsymbol{f}^k,\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k\right\rangle-(\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f}^k,\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k)_\delta.\tag{3.3.22}$$

et

$$\left\|\boldsymbol{\chi}^k-\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k\right\|_{\mathcal{X}_3}\leq cN_\delta^{-1}\sum_{\ell=1}^L\left\|\boldsymbol{\chi}^k\right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)}.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k(\boldsymbol{\chi}^k-\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k,\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k)&\leq c\left\|\boldsymbol{\chi}^k-\boldsymbol{\chi}_{\delta-1}^k\right\|_{\mathcal{X}_3}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3}\\&\leq cN_\delta^{-1}\sum_{\ell=1}^L\left\|\boldsymbol{\chi}^k\right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3}\\&\leq cN_\delta^{-1}\left\|\boldsymbol{h}^k\right\|_{L^2_1(\Omega)^3}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathcal{X}_3}.\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

En effet d'après [8], on a puisque Ω_ℓ est convexe

$$\left\|\boldsymbol{\chi}^k\right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)}+\left\|\eta^k\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)}\leq c\left\|\boldsymbol{h}^k\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)^3}$$

d'où

$$\sum_{\ell=1}^L\left(\left\|\boldsymbol{\chi}^k\right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)}+\left\|\eta^k\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)}\right)\leq c\left\|\boldsymbol{h}^k\right\|_{L^2_1(\Omega)^3}.$$

On sait d'après 2) de la preuve du théorème 3.3.1 que si $\boldsymbol{f}^k \in \mathbf{H}^s_{(k)}(\Omega)$ alors on a :

$$|\langle \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{\chi}^k_{\delta-1}\rangle - (\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{\chi}^k_{\delta-1})_\delta| \leq c N_\delta^{1-s} \left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{\mathbf{H}^s_{(k)}(\Omega)} \left(\left\|\boldsymbol{\chi}^k - \boldsymbol{\chi}^k_{\delta-1}\right\|_{\mathcal{X}_3} + \left\|\boldsymbol{\chi}^k\right\|_{\mathcal{X}_3}\right). \quad (3.3.24)$$

Pour majorer $\left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{\mathcal{X}_3}$, on utilise le théorème 3.3.1.

Enfin en combinant (3.3.20), a), (3.3.23), (3.3.16), (3.3.24) et le théorème 3.3.1 on déduit le résultat. ■

3.4 Retour au problème tridimensionnel

On pose

$$\breve{\boldsymbol{u}}_K = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq K} \mathcal{R}_\theta u^k(r,z)\, e^{ik\theta} \text{ et } \breve{p}_K = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq K} p^k(r,z)\, e^{ik\theta}. \quad (3.4.1)$$

Soit $(\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}, \breve{p}_{K,\delta})$ l'approximation de la solution $(\breve{\boldsymbol{u}}, \breve{p})$ du problème (3.1.1), avec

$$\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq K} \mathcal{R}_\theta u^k_\delta(r,z)\, e^{ik\theta} \text{ et } \breve{p}_{K,\delta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq K} p^k_\delta(r,z)\, e^{ik\theta}, \quad (3.4.2)$$

Le couple $(\boldsymbol{u}^0_\delta, p^0_\delta)$ est la solution des problèmes (3.2.9) et (3.2.10) avec $\boldsymbol{f}^0$ et $\boldsymbol{g}^0$ pour second membres. Le couple $\left(\boldsymbol{u}^k_\delta, p^k_\delta\right)$ avec $k \neq 0$ est la solution du problème (3.3.4) avec second membres $\boldsymbol{f}^k$ et $\boldsymbol{g}^k$.

Soit $\left(\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}, \breve{p}^*_{K,\delta}\right)$ l'approximation de la solution $(\breve{\boldsymbol{u}}, \breve{p})$ du problème (3.1.1), avec

$$\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq K} \mathcal{R}_\theta u^k_{K,\delta}(r,z)\, e^{ik\theta} \text{ et } \breve{p}^*_{K,\delta} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq K} p^k_{K,\delta}(r,z)\, e^{ik\theta}. \quad (3.4.3)$$

Le couple $\left(\boldsymbol{u}^0_{K,\delta}, p^0_{K,\delta}\right)$ est la solution des problèmes (3.2.9) et (3.2.10) avec second membres $\boldsymbol{f}^0_K$ et $\boldsymbol{g}^0_K$. Le couple $\left(\boldsymbol{u}^k_{K,\delta}, p^k_{K,\delta}\right)$ avec $k \neq 0$ est la solution du problème (3.3.4) avec second membres $\boldsymbol{f}^k_K$ et $\boldsymbol{g}^k_K$.

Remarque 3.4.1 *Si $\breve{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{H}^1(\breve{\Omega})$, alors $\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}$ et $\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathbf{H}^1(\breve{\Omega})$. Pour le retour au problème 3D, on doit définir une norme qu'on appelera $\|.\|_{\breve{\mathcal{X}}_3}$.*

Notation 3.4.1 *On définit la norme $\breve{\mathcal{X}}_3$ par :*

$$\|.\|_{\breve{\mathcal{X}}_3} = (\sum_{\ell=1}^{L} \|.\|^2_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)})^{\frac{1}{2}} \tag{3.4.4}$$

Théorème 3.4.1 *Soit $s > \frac{5}{2}$, $\breve{\boldsymbol{f}}$ est dans $\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})$ et $\breve{\boldsymbol{g}}$ est dans $\mathbf{H}^{s+1}(\breve{\Omega})$. Alors si $\left(\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}, \breve{p}^*_{K,\delta}\right)$ est l'approximation de la solution $(\breve{\boldsymbol{u}}, \breve{p})$ du problème (3.1.1).*

1) ***Cas homogène :***

$$\begin{aligned}\left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{\breve{\mathcal{X}}_3} + \beta_{K,\delta}||\breve{p} - \breve{p}^*_{K,\delta}||_{L^2_1(\Omega)} \;&\leq\; c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, E_\delta^S) \\ &+ K^{1-s}\} \left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

2) ***Cas non homogène :***

$$\begin{aligned}\left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{\breve{\mathcal{X}}_3} + \beta_{K,\delta}||\breve{p} - \breve{p}^*_{K,\delta}||_{L^2_1(\Omega)} \;&\leq\; c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, \beta_\delta^{-1}E_\delta^S) + K^{1-s}\} \\ &(\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})} + \|\breve{\boldsymbol{g}}\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\breve{\Omega})}).\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

où $N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$ et E_δ^S resp λ_δ sont définis dans (3.2.46) resp (2.3.25).

Preuve 1) **Cas homogène :**

a) D'une part on a $\|.\|_{\breve{\mathcal{X}}_3} \simeq \sum_{\ell=1}^{L} \|.\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)}$, d'autre part on décompose $\left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{\breve{\mathcal{X}}_3}$ en trois parties :

$$\begin{aligned}\left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{\breve{\mathcal{X}}_3} \;&\leq\; c\sum_{\ell=1}^{L}\{\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}_K\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} \\ &+ \|\breve{\boldsymbol{u}}_K - \breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} + \left\|\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)}\}.\end{aligned}$$

On distingue trois cas :

(*) On a d'après (1.6.6) et (1.6.5)

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}_K\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)}.$$

On remarque que

$$\sum_{\ell=1}^{L} \|.\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\Omega_\ell)} \simeq \|.\|_{\mathcal{X}_3} \text{ si } k \neq 0$$

et

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\boldsymbol{u}^{(0)} - u\right\|_{\mathbf{H}^1_{(0)}(\Omega_\ell)} \leq c \left\|u_\theta^{(0)} - u_{\theta\delta}^{(0)}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + \left\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta^{(0)}\right\|_{\mathbb{Z}}.$$

Donc on peut utiliser (2.3.53), (3.2.49) et (3.3.16) et le fait que $E_\delta \leq E_\delta^S$ pour déduire que

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}_K\right\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N^{1-s}, E_\delta^S\} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\Omega)}.$$

Enfin l'équivalence des normes $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\boldsymbol{f}^k\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\Omega)}$ et $\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}$, donne que

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}_K\right\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N^{1-s}, E_\delta^S\} \left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.$$

(**) On a d'après (1.6.8)

$$\sum_{\ell=1}^{L} \left\|\breve{\boldsymbol{u}}_K - \breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}\right\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} \left\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_\delta^k\right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)},$$

on conclut comme dans (*).

(***) En utilisant (3.2.9) et (3.3.8) si $k = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{u}_\delta^*\right\|_{\mathbb{Z}}^2 &\leq \gamma \mathcal{A}_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{u}_\delta^*, \boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{u}_\delta^*\right) = \gamma(\mathcal{I}_\delta(\boldsymbol{f}^0 - \boldsymbol{f}^0_K), \boldsymbol{u}_\delta^0 - \boldsymbol{u}_\delta^{0*}) \\
\left\|u_{\theta\delta} - u_{\theta\delta}^*\right\|_{\mathcal{X}_1^1}^2 &\leq \beta a_{1\delta}\left(u_{\theta\delta} - u_{\theta\delta}^*, u_{\theta\delta} - u_{\theta\delta}^*\right) = \beta(\mathcal{I}_\delta(f_\theta^0 - f_{\theta K}^0), u_{\theta\delta} - u_{\theta\delta}^*)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{u}_\delta - \boldsymbol{u}_\delta^*\right\|_{\mathbb{Z}} + \left\|u_{\theta\delta} - u_{\theta\delta}^*\right\|_{\mathcal{X}_1^1} &\leq \left\|\mathcal{I}_\delta(\boldsymbol{f}^0 - \boldsymbol{f}^0_K)\right\|_{\mathbb{Z}} + \left\|\mathcal{I}_\delta(f_\theta^0 - f_{\theta K}^0)\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \\
&\leq \left\|\mathcal{I}_\delta(\boldsymbol{f}^0_3 - \boldsymbol{f}^0_{3K})\right\|_{\mathcal{X}_3}
\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{f}^0_3 = (f_r^0, f_\theta^0, f_z^0)$. D'autre part si $k \neq 0$, on a d'après (3.3.8) :

$$\begin{aligned}
\left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{u}_\delta^{k*}\right\|_{\mathcal{X}_3}^2 &\leq \lambda \mathcal{A}_k\left(\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{u}_\delta^{k*}, \boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{u}_\delta^{k*}\right) \\
&= \lambda(\mathcal{I}_\delta(\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}^k_K), \boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{u}_\delta^{k*}) \leq c \left\|\mathcal{I}_\delta(\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}^k_K)\right\|_{\mathcal{X}_3} \left\|\boldsymbol{u}_\delta^k - \boldsymbol{u}_\delta^{k*}\right\|_{\mathcal{X}_3}.
\end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{L} \left\| \breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta} \right\|_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} &\leq c \sum_{|k|\leq K} \{ \sum_{\ell=1}^{L} \left\| \boldsymbol{u}^k_\delta - \boldsymbol{u}^{k*}_\delta \right\|_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \} \\
&\leq c \sum_{|k|\leq K} \left\| \boldsymbol{u}^k_\delta - \boldsymbol{u}^{k*}_\delta \right\|_{\mathcal{X}_3} \\
&\leq c \sum_{|k|\leq K} \left\| \mathcal{I}_\delta (\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}^k_K) \right\|_{\mathcal{X}_3} \\
&\leq c \sum_{|k|\leq K} \{ ||\boldsymbol{f}^k - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k||_{\mathcal{X}_3} + ||\boldsymbol{f}^k_K - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k_K)||_{\mathcal{X}_3} \\
&\quad + ||\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}^k_K||_{\mathcal{X}_3} \}.
\end{aligned}
$$

Pour le premier terme $\sum_{|k|\leq K} \{ ||\boldsymbol{f}^k - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k||_{\mathcal{X}_3}$ on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq K} \{ ||\boldsymbol{f}^k - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k||_{\mathcal{X}_3} &\leq c \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} ||\boldsymbol{f}^k - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k||_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \\
&\leq c N^{1-s} \sum_{\ell=1}^{L} ||\boldsymbol{f}^k||_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)}.
\end{aligned}
$$

et pour le terme $\sum_{|k|\leq K} ||\boldsymbol{f}^k_K - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k_K)||_{\mathcal{X}_3}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq K} ||\boldsymbol{f}^k_K - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k_K)||_{\mathcal{X}_3} &\leq c \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} ||\boldsymbol{f}^k_K - \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k_K||_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \\
&\leq c N^{1-s} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} ||\boldsymbol{f}^k_K||_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \\
&\leq c N^{1-s} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} \{ ||\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}^k_K||_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} + ||\boldsymbol{f}^k||_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \}
\end{aligned}
$$

On utilise de nouveau (1.6.6) et (1.6.8) pour conclure que

$$
\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} ||\boldsymbol{f}^k||_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c ||\breve{\boldsymbol{f}}||_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})},
$$

et

$$
\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{|k|\leq K} \{ ||\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}^k_K||_{\mathbf{H}^{s-1}_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \leq c ||\breve{\boldsymbol{f}}||_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.
$$

Pour le dernier terme $\sum_{|k|\le K} ||\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}_K^k||_{\mathcal{X}_3}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\le K} ||\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}_K^k||_{\mathcal{X}_3} &\le c\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{|k|\le K} ||\boldsymbol{f}^k - \boldsymbol{f}_K^k||_{\mathbf{H}^1_{(k)}(\breve{\Omega}_\ell)} \\ &\le c\sum_{\ell=1}^{L} ||\breve{\boldsymbol{f}} - \breve{\boldsymbol{f}}_K||_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)}\end{aligned}$$

On utilise (*) pour conclure que

$$c\sum_{\ell=1}^{L} ||\breve{\boldsymbol{f}} - \breve{\boldsymbol{f}}_K||_{\mathbf{H}^1(\breve{\Omega}_\ell)} \le cK^{1-s}||\breve{\boldsymbol{f}}||_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega}_\ell)}$$

Finalement, en utilisant (*), (**) et (***) on obtient

$$\left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{\breve{\mathcal{X}}_3} \le C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, E_\delta^S) + K^{1-s}\}\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.$$

On utilise la même démarche pour démontrer que

$$\begin{aligned}\beta_{K,\delta}||\breve{p} - \breve{p}^*_{K,\delta}||_{L^2_1(\Omega)} &\le C(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, E_\delta^S) \\ &\qquad + K^{1-s}\}\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})},\end{aligned}$$

et la preuve est terminée.

2) **Cas non homogène** :

Comme dans le cas axisymétrique et général, le terme β_δ^{-1} intervient dans le facteur contenant $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{Z}}$ et $\left\|\boldsymbol{u}^k\right\|_{\mathcal{X}_3}$. En utilisant 1), (3.2.50) et en sommant sur k dans l'inégalité (3.3.17), on obtient (3.4.6). ■

Théorème 3.4.2 *On suppose que* $\breve{\boldsymbol{f}} \in \mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})$ *et* $\breve{\boldsymbol{g}} \in \mathbf{H}^{s+1}(\breve{\Omega})$ *avec* $s > \frac{5}{2}$. *Soit* $\breve{\boldsymbol{u}}$ *la solution du problème (*3.1.1*)* $\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}$ *et* $\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}$ *les sommes finies induites dans (3.4.2) et (3.4.3).*

1) ***Cas homogène*** *: on a*

$$\begin{aligned}\left\|\breve{\boldsymbol{u}} - \breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{L^2(\breve{\Omega})^3} &\le c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}}\{\sup(N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}E_\delta^S) \\ &\qquad + K^{1-s}\}\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

*2) **Cas non homogène** : on a*

$$\left\|\breve{\boldsymbol{u}}-\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{L^2(\breve{\Omega})^3} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}}\sup\{N_\delta^{1-s}, N_\delta^{-1}\beta_\delta^{-1}(\log N_\delta)^{\varrho}E_\delta^S, K^{1-s}\} \left(\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}+\|\breve{\boldsymbol{g}}\|_{\mathbf{H}^{s+1}(\breve{\Omega})}\right). \tag{3.4.8}$$

où $\varrho = 0$ si la décomposition est conforme et 1 sinon. $N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\}$ et E_δ^S resp λ_δ sont définis dans (3.2.46) resp (2.3.25).

Preuve 1) On a

$$\|\breve{\boldsymbol{u}}-\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}\|_{L^2(\breve{\Omega})^3} \leq \|\breve{\boldsymbol{u}}-\breve{\boldsymbol{u}}_K\|_{L^2(\breve{\Omega})^3}+\|\breve{\boldsymbol{u}}_K-\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}\|_{L^2(\breve{\Omega})^3} \tag{3.4.9}$$

Or d'après

$$||\breve{\boldsymbol{u}}||_{\mathbf{H}^{s+1}(\breve{\Omega})} \leq c\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\|\breve{\boldsymbol{u}}-\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}\|_{L^2(\breve{\Omega})^3} &\leq c\{K^{-1-s}||\breve{\boldsymbol{u}}||_{\mathbf{H}^{s+1}(\breve{\Omega})}+\sum_{\ell=1}^{L}\sum_{|k|\leq K}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)^3}\} \\
&\leq c\{K^{-1-s}\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}+\sum_{|k|\leq K}(\sum_{\ell=1}^{L}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega_\ell)^3})\}. \\
&\leq c\{K^{-1-s}\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}+\sum_{|k|\leq K}\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega)^3}\} \qquad (3.4.10)
\end{aligned}$$

On utilise le théorème 3.2.4, pour majorer $\left\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta\right\|_{L^2_1(\Omega)^3}$.

2) La coercivité et la continuité de $\mathcal{A}_k$ et le fait que

$$\mathcal{A}_k\left(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta, \boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta\right) = \left\langle \mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^k_\delta\right\rangle.$$

nous mène à utiliser la même démarche que dans la preuve du théorème 2.5.1, pour déduire que

$$\left\|\breve{\boldsymbol{u}}_{K,\delta}-\breve{\boldsymbol{u}}^*_{K,\delta}\right\|_{L^2(\breve{\Omega})^3} \leq c(K^{1-s}+N_\delta^{1-s})\left\|\breve{\boldsymbol{f}}\right\|_{\mathbf{H}^{s-1}(\breve{\Omega})}.$$

En combinant 1) et 2), on déduit le résultat. ■

3.4.1 Algorithme de Strang et Fix

3.4.1.1 Le problème discret : cas homogène

Dans cette partie on va agrandir l'espace discret où est définie la vitesse. Pour la pression, on garde l'espace M_δ. On va se limiter au cas **homogène** avec $\omega_1 = \frac{3\pi}{2}$ et $\omega_2 = \frac{\pi}{2}$. Pour cela, soit $\boldsymbol{S}_1$ la première fonction singulière de la vitesse, on définit, alors l'espace $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta$ comme suit :

$$\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta = \boldsymbol{Z}_\delta + \mathbb{R}\boldsymbol{S}_1$$

C'est à dire, si $\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta$ appartient à $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta$ il existe $\boldsymbol{u}_\delta$ qui appartient à $\boldsymbol{Z}_\delta$ et λ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta = \boldsymbol{u}_\delta + \lambda \boldsymbol{S}_1$$

On sait que $\boldsymbol{S}_{1v}$ appartient à $V_1^1(\Omega) \times H_1^1(\Omega)$, on définit, alors la norme suivante :

$$\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathring{\mathbb{Z}}} = (\|\boldsymbol{u}_\delta\|_{\mathbb{Z}}^2 + |\lambda|^2 \|\boldsymbol{S}_1\|_{\mathbb{Z}}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, on définit le problème discret comme suit :

Pour une donnée $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ continue sur $\bar{\Omega}$, trouver $\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta = (\mathring{u}_{\delta r}, \mathring{u}_{\delta z})$ dans $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta$ et p_δ dans M_δ tel que pour tout $\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta = (\mathring{v}_{\delta r}, \mathring{v}_{\delta z})$ dans $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta$ et pour tout q_δ appartenant à M_δ, on a :

$$\begin{cases} \mathring{a}_\delta(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta) + \mathring{b}_\delta(\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta, p_\delta) = (\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta)_\delta \\ \mathring{b}_\delta(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, q_\delta) = 0 \end{cases} \tag{3.4.11}$$

avec

$$\mathring{a}_\delta(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta) = \mathring{a}_{1\delta}(\mathring{u}_{\delta r}, \mathring{v}_{\delta r}) + \mathring{a}_\delta(\mathring{u}_{\delta z}, \mathring{v}_{\delta z})$$

où $\mathring{a}_\delta(.,.)$ est défini dans (2.5.21) et $\mathring{a}_{1\delta}(.,.)$ est défini dans (2.5.37) pour $k=1$, et

$$(\mathcal{I}_\delta \boldsymbol{f}, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta)_\delta = (\mathcal{I}_\delta f_r, \mathring{v}_{\delta r})_\delta + (\mathcal{I}_\delta f_z, \mathring{v}_{\delta z})_\delta.$$

Enfin, $\mathring{b}_\delta(.,.)$ est définie de la façon suivante, pour $\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta = \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta + \lambda \boldsymbol{S}_{1v}$ dans $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta$ et q_δ dans M_δ :

$$\mathring{b}_\delta(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, q_\delta) = -\sum_{\ell=1}^{L} (div_r \boldsymbol{u}_\delta, q_\delta)_{N_\ell} + \lambda \int_{\Omega_\ell} (div_r \boldsymbol{S}_1) q_\delta r dr dz). \tag{3.4.12}$$

Comme $div_r \boldsymbol{S}_{1v} = 0$, on a

$$\mathring{b}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, q_\delta\right) = b_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, q_\delta\right)$$

Soit le noyau discret de $\mathring{b}_\delta\left(.,.\right)$

$$\mathring{\mathbb{V}}_\delta = \left\{ \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta \in \mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta,\ \mathring{b}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta, q_\delta\right) = 0, \forall q_\delta \in M_\delta \right\}.$$

On va montrer que le problème (3.4.11) est bien posé, on commence par montrer les propriétés suivantes :

Proposition 3.4.1 *La forme bilinéaire $\mathring{a}_\delta\left(.,.\right)$ est continue et coercive sur $\mathring{\mathbb{V}}_\delta$ et il existe deux constantes σ_δ et β_δ telles que*

$$\begin{array}{rcl} \forall \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta & \in & \mathring{\mathbb{V}}_\delta, \\ \mathring{a}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\right) & \leq & \sigma_\delta \left\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\right\|_{\mathring{\mathbb{Z}}\ \ \delta} \left\|\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\right\|_{\mathring{\mathbb{Z}}}, \\ \mathring{a}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\right) & \geq & \beta_\delta \left\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\right\|^2_{\mathring{\mathbb{Z}}}. \end{array} \tag{3.4.13}$$

Preuve 1) On a $\mathring{a}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\right) = \mathring{a}_{1\delta}\left(\mathring{u}_{r\delta}, \mathring{v}_{r\delta}\right) + \mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_{z\delta}, \mathring{v}_{z\delta}\right)$, et

$$\left|\mathring{a}_\delta\left(\mathring{u}_{z\delta}, \mathring{v}_{z\delta}\right)\right| \leq \alpha \left\|\mathring{u}_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} \left\|\mathring{v}_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}_1^1}$$
$$\left|\mathring{a}_{1\delta}\left(\mathring{u}_{r\delta}, \mathring{v}_{r\delta}\right)\right| \leq \alpha_1 \left\|\mathring{u}_{r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*} \left\|\mathring{v}_{r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*}$$

D'où

$$\left|\mathring{a}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\right)\right| \leq \eta(\left\|\mathring{u}_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + \left\|\mathring{u}_{r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*})(\left\|\mathring{v}_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + \left\|\mathring{v}_{r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*})$$

et

$$\left\|\mathring{u}_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}_1^1} + \left\|\mathring{u}_{r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*} \leq c \left\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\right\|_{\mathring{\mathbb{Z}}}$$

en effet sur chaque Ω_ℓ on utilise l'inégalité $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2 \leq 2(a+b)$ pour déduire que

$$\begin{array}{rl} & (\left\|u_{r\delta}\right\|^2_{\mathcal{X}_*} + |\lambda|^2 \left\|S_{1r}\right\|^2_{\mathcal{X}_*})^{\frac{1}{2}} + (\left\|v_{z\delta}\right\|^2_{\mathcal{X}_1^1} + |\lambda|^2 \left\|S_{1z}\right\|^2_{\mathcal{X}_1^1})^{\frac{1}{2}} \\ \leq & c[(\left\|u_{r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*} + \left\|v_{z\delta}\right\|_{\mathcal{X}_1^1})^2 + |\lambda|^2(\left\|S_{1r\delta}\right\|_{\mathcal{X}_*} + \left\|S_{1z}\right\|_{\mathcal{X}_1^1})^2]^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

On a alors le résultat de la première inégalité.

2) On prend $\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta = \boldsymbol{u}_\delta + \lambda \boldsymbol{S}_1$ de $\mathring{\mathbb{V}}_\delta$, (puisque $div_r \boldsymbol{S}_{1v} = 0$). Alors on a d'après (2.5.27) et (2.5.43, $k=1$), on a

$$\begin{aligned} \mathring{a}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\right) \geq\ & c\sum_{\ell=1}^{L}\{(\|u_{r\ell}\|^2_{V_1^1(\Omega_\ell)} + |\lambda|^2 \|S_{1r\ell}\|^2_{V_1^1(\Omega_\ell)}) \\ & +(\|u_{z\ell}\|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)} + |\lambda|^2 \|S_{1rz\ell}\|^2_{H_1^1(\Omega_\ell)})\} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathring{a}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\right) \geq c'(\|\boldsymbol{u}_\delta\|^2_{\boldsymbol{Z}_\delta} + |\lambda|^2 \|\boldsymbol{S}\|^2_{\boldsymbol{Z}_\delta}).$$

■

On démontre maintenant la condition inf $-$ sup sur $\mathring{b}_\delta(.,.)$.

Proposition 3.4.2 *On a la condition inf-sup suivante sur la forme* $\mathring{b}_\delta\,(.,.)$*. Il existe une constante* β_δ *telle que*

$$\forall q_\delta \in M_\delta,\ \sup_{\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta \in \mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta} \frac{\mathring{b}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, q_\delta\right)}{\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}}} \geq \beta_\delta \|q_\delta\|_{L_1^2(\Omega)},$$

avec

$$\beta_\delta = \bar{N}_\delta^{-\frac{1}{2}}(\log \bar{N}_\delta)^{-1}.$$

Preuve Puisque l'espace $\boldsymbol{Z}_\delta$ est inclus dans l'espace $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta$ on a

$$\sup_{\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta \in \mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta} \frac{\mathring{b}_\delta\left(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, q_\delta\right)}{\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathring{\mathbb{Z}}}} \geq \sup_{\boldsymbol{u}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{b_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, q_\delta\right)}{\|u_\delta\|_{\mathbb{Z}}},$$

et puisque

$$\sup_{\boldsymbol{u}_\delta \in \boldsymbol{Z}_\delta} \frac{b_\delta\left(\boldsymbol{u}_\delta, q_\delta\right)}{\|u_\delta\|_{\mathbb{Z}}} \geq \beta_\delta \|q_\delta\|_{L_1^2(\Omega)},$$

ceci termine la démonstration. ■

Proposition 3.4.3 *Pour tout* $\boldsymbol{f}$ *appartenant à* $L_1^2(\Omega)^2$*, le problème (3.4.11) admet une solution unique* $(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, p_\delta)$ *dans* $\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta \times M_\delta$ *vérifiant :*

$$\|\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta} + \mu_\delta \|p_\delta\|_{L_1^2(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{L_1^2(\Omega)}.$$

3.4.2 Estimation de l'erreur

Ici on s'intéresse à l'erreur sur la vitesse car c'est elle qu'on va améliorer. Puisque la forme $\mathring{a}_\delta(.,.)$ est continue et coercive, on montre de la même façon que dans le chapitre précédent, que l'erreur entre la solution du problème continu (3.1.1) et celle du problème discret (3.4.11) vérifie la proposition suivante :

Proposition 3.4.4 *Soit* $(\boldsymbol{u}, p)$ *la solution du problème* (3.1.1), $(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, p)$ *la solution du problème* (3.4.11). *Alors on a :*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}-\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}+\beta_\delta\|p-p_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} \leq c\{&\inf_{\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\in\mathring{\mathbb{V}}_\delta}[\|\boldsymbol{u}-\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}+\sup_{\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\in\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}\frac{(\mathcal{A}-\mathcal{A}_\delta)(\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta,\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta)}{\|\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}}]\\ &+\inf_{q_\delta\in M_\delta}[\|p-q_\delta\|_{L^2_1(\Omega)}+\sup_{\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\in\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}\frac{(b-b_\delta)(\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta,q_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}}]\\ +\sup_{\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\in\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}\frac{\int_\Omega \boldsymbol{f}\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta(r,z)r\ dr\ dz-(\mathcal{I}_\delta\boldsymbol{f},\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta)_\delta}{\|\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}}&+\sup_{\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\in\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}\frac{\sum_{\gamma_m^-\in\mathcal{S}}\int_{\gamma_m^-}(-\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial n_m}+p.n(\tau))[\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta](\tau)d\tau}{\|\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}}\}\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

où c est une constante positive indépendante de δ.

Preuve La preuve est une conséquence directe des propositions 3.2.2 et 3.2.4. ■

Théorème 3.4.3 *Soit* $(\boldsymbol{u}, p)$ *la solution du problème* (3.1.1), $(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, p)$ *la solution du problème* (3.4.11). *On suppose que pour* $1 \leq \ell \leq L$, $\boldsymbol{u}_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)^2$, $p_{|\Omega_\ell} \in H_1^{s_\ell-1}(\Omega_\ell)$ *pour tout* $s_\ell \geq 2$ *et que la donnée* $\boldsymbol{f}$ *vérifie* $\boldsymbol{f}_{|\Omega_\ell} \in H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^2$ *pour tout* $\sigma_\ell > 1$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}-\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}+\beta_\delta\|p-p_\delta\|_{L^2_1(\Omega)} &\leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}}\sum_{\ell=1}^{L}[N_\ell^{-s_\ell}\log(N_\ell)(\left\|\boldsymbol{u}_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)^2}\\ &+\left\|p_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{s_\ell}(\Omega_\ell)})\\ &+N_\ell^{-\sigma_\ell}\left\|\boldsymbol{f}_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{\sigma_\ell}(\Omega_\ell)^2}].\end{aligned}$$

Preuve D'après (3.4.14) on remarque que

$$\inf_{\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\in\mathring{\mathbb{V}}_\delta}\|\boldsymbol{u}-\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}\leq\inf_{\boldsymbol{v}_\delta\in\boldsymbol{V}_\delta}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_\delta\|_{\boldsymbol{Z}_\delta},$$

en effet il suffit de prendre $\boldsymbol{u} - \mathring{\boldsymbol{v}}_\delta = \boldsymbol{u}_{reg} - \boldsymbol{v}_\delta$. Le terme $\sup\limits_{\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta \in \mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta} \frac{(\mathcal{A}-\mathcal{A}_\delta)(\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta, \mathring{\boldsymbol{w}}_\delta)}{\|\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}}$ est majoré par $\sum\limits_{\ell=1}^{L} N_\ell^{-s_\ell} \left\|\boldsymbol{u}_{|\Omega_\ell}\right\|_{H_1^{s_\ell+1}(\Omega_\ell)^2}$ si on choisit $\mathring{\boldsymbol{v}}_\delta = \boldsymbol{v}_\delta$ (voir 1) de la preuve du théorème 3.2.2. Le terme $\sup\limits_{\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta \in \mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta} \frac{(b-b_\delta)(\mathring{\boldsymbol{w}}_\delta, q_\delta)}{\|\boldsymbol{w}_\delta\|_{\mathring{\boldsymbol{Z}}_\delta}}$ s'annule pour $q_\delta \in M_\delta$. Pour les autres termes ils se majorent comme dans le théorème (3.2.2). ■

Théorème 3.4.4 *On suppose que* $\boldsymbol{f} \in H_-^{s-1}(\Omega) \times H_+^{s-1}(\Omega)$ *et* $\boldsymbol{g} \in H_-^{s+1}(\Omega) \times H_+^{s+1}(\Omega)$ *avec* $s > \frac{5}{2}$, *alors il existe une constante positive c telle que, la solution* $(\boldsymbol{u}, p)$ *solution du problème (3.2.2) et* $(\mathring{\boldsymbol{u}}_\delta, p_\delta)$ *solution du problème* (3.4.11) *vérifient :*

1) ***Cas homogène :*** *on a*

$$\|\boldsymbol{u} - \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \beta_\delta ||p - p_\delta||_{L_1^2(\Omega)} \leq c(1+\lambda_\delta)^{\frac{3}{4}} \sup\{N_\delta^{1-s}, E_\delta^{1S}\} \|\boldsymbol{f}\|_{H_1^{s-1}(\Omega)^2} \tag{3.4.15}$$

2) ***Cas non homogène :*** *on a*

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u} - \mathring{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathbb{Z}} + \beta_\delta ||p - p_\delta||_{L_1^2(\Omega)} \quad \leq \quad & c(1+\lambda_\delta)^{\frac{1}{2}} \sup\{N_\delta^{1-s}, \beta_\delta^{-1} E_\delta^{1S}\} \\ & (\|\boldsymbol{f}\|_{H_1^{s-1}(\Omega)^2} + \|\boldsymbol{g}\|_{H_1^{s+1}(\Omega)}) \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

où

$$N_\delta = \min\{N_\ell, 1 \leq \ell \leq L\} \;\; \textit{et} \;\; E_\delta^{1S} = \max\left\{E_\ell^{1S}, 1 \leq \ell \leq L\right\} \tag{3.4.17}$$

$$E_\ell^{1S} = \begin{cases} 0 & \textit{si } \bar{\Omega}_\ell \textit{ ne contient pas des } e_i, \\ N_{e_i}^{-4\eta(\frac{\pi}{2})}(\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}} & \textit{si } \bar{\Omega}_\ell \textit{ contient } e_i \textit{ avec } \omega_{e_i} = \frac{\pi}{2}, \\ N_{e_i}^{-4\eta(\frac{3\pi}{2})}(\log N_{e_i})^{\frac{1}{2}} & \textit{si } \bar{\Omega}_\ell \textit{ contient } e_i \textit{ avec } \omega_{e_i} = \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \tag{3.4.18}$$

et λ_δ *est définie dans (2.3.25).*

Preuve La preuve est identique à la preuve du théorème 3.2.3. ■

3.5 Ecriture matricielle du problème de Stokes

3.5.1 Dans un cylindre de référence

3.5.1.1 Cas axisymétrique

On rappelle que $r_i^{(2)} = \frac{1+\zeta_i^{(2)}}{2}$ où $1 \leq i \leq N+1$ et $\xi_j, 0 \leq j \leq N$. On a

$$u_{rN}(r,z)=\sum_{i=2}^{N+1}\sum_{j=0}^{N}u_{r,ij}l_i^{(2)}(r)\,l_j(z)\,,$$
$$u_{zN}(r,z)=\sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=0}^{N}u_{z,ij}l_i^{(2)}(r)\,l_j(z)$$
$$p_N=\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}p_{ij}m_i^{(1)}(r)\,m_j(z)\,.$$

On pose $\mathcal{I}$, respectivement $\mathcal{I}^*$, respectivement $\mathcal{B}$ l'ensemble d'indice (i,j), $1\le i\le N$ et $1\le j\le N-1$, respectivement $2\le i\le N$ et $1\le j\le N-1$, respectivement ($i=N+1$ et $0\le j\le N$, $1\le i\le N$ et $j=0$ ou $j=N$). On remarque que $u_{r,ij}=g_r(r_i^{(2)},\xi_j)$ et $u_{z,ij}=g_z(r_i^{(2)},\xi_j)$ sur B. On pose U le vecteur $u_{r,ij}$, $(i,j)\in I^*$ et $u_{z,ij}$, $(i,j)\in I$.

1) Pour $m=1$, $p_N=\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{N-1}p_{ij}m_i^{(1)}(r)\,m_j(z)$, où $m_i^{(1)}$ respectivement m_j associé avec $r_i^{(2)}$ $2\le i\le N$ et ξ_j, $1\le j\le N-1$. On note P le vecteur constitué par p_{ij} $1\le i\le N$ et $0\le j\le N+1$.

Le système linéaire s'écrit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les expressions de A, B, F et

$$A=\begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_r \\ B_z \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} F_r \\ F_z \end{pmatrix}\ \text{et } U=\begin{pmatrix} U_r \\ U_z \end{pmatrix}$$

La matrice A

La matrice A_r est constituée d'éléments $a_{1N}(l_i^2l_j,l_{i'}^2l_{j'})$ avec $(i,j)\in I^*$ et $(i',j')\in I^*$ et la matrice A_z est constituée d'éléments $a_N(l_i^2l_j,l_{i'}^2l_{j'})$ avec $(i,j)\in I$ et $(i',j')\in I$.

La matrice B

La matrice B_r est constituée d'éléments $b_N(l_{i'}^2l_{j'},0,l_i^2l_j)$ avec $(i',j')\in I$ et $(i,j)\in I\cup B$ et la matrice B_z est constituée d'éléments de type $b_N(0,l_{i'}^2l_{j'},l_i^2l_j)$ avec $(i',j')\in I^*$ et $(i,j)\in I\cup B$.

La matrice U

La matrice $U_r = u_{r,ij}$ avec $(i,j) \in I^*$ et la matrice $U_z = u_{z,ij}$ avec $(i,j) \in I$ et $p = p_{ij}$ avec $(i,j) \in I^*$.

La matrice F se décompose en F_r et F_z avec

$$F_{r,i'j'} = 1/4 f_r(r_{i'}^{(2)}, \xi_{j'})\omega_{i'}^{(2)}\rho_{j'} - \sum_{(i,j)\in B} g_r(r_i^{(2)}, \xi_j) a_{1N}(l_i^2 l_j, l_{i'}^2 l_{j'}), (i',j') \in I^*$$
$$F_{z,i'j'} = 1/4 f_z(r_{i'}^{(2)}, \xi_{j'})\omega_{i'}^{(2)}\rho_{j'} - \sum_{(i,j)\in B} g_z(r_i^{(2)}, \xi_j) a_N(l_i^2 l_j, l_{i'}^2 l_{j'}), (i',j') \in I \ .$$

3.5.1.2 Cas général

Cas $|k| \geq 2$ Le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ B_k^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k \\ P_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice U_k

Le vecteur U_k est constitué des $u_{r,ij} = u_{rN}^k(r_i^{(2)}, \xi_j)$, $u_{\theta,ij} = u_{\theta N}^k(r_i^{(2)}, \xi_j)$ et $u_{z,ij} = u_{zN}^k(r_i^{(2)}, \xi_j)$, $(i,j) \in I^*$. P_k est le même que P pour $k = 0$.

La matrice A_k

La matrice A_k se décompose en A_{rk}, $A_{\theta k}$, $A_{r\theta k}$ et A_{zk} avec :

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{rk} & A_{r\theta k} & 0 \\ {}^t\bar{A}_{r\theta k} & A_{\theta k} & 0 \\ 0 & 0 & A_{zk} \end{pmatrix}.$$

La matrice A_{rk} est constituée d'éléments $a_N(l_i^{(2)} l_j, l_{i'}^{(2)} l_{j'}) + (1+k^2)\,(r^{-1} l_i^{(2)} l_j, r^{-1} l_{i'}^{(2)} l_{j'})_N$ avec $(i,j)\,,(i',j') \in I^*$.

La matrice $A_{r\theta k}$ est constituée d'éléments $2ik(r^{-1} l_i^{(2)} l_j, r^{-1} l_{i'}^{(2)} l_{j'})_N$ avec $(i,j)\,,(i',j') \in I^*$.

La matrice $A_{\theta k}$ est constituée d'éléments $a_N(l_i^{(2)} l_j, l_{i'}^{(2)} l_{j'}) + (1+k^2)\,(r^{-1} l_i^{(2)} l_j, r^{-1} l_{i'}^{(2)} l_{j'})_N$ avec $(i,j)\,,(i',j') \in I^*$.

La matrice A_{zk} est constituée d'éléments $a_N(l_i^{(2)} l_j, l_{i'}^{(2)} l_{j'}) + k^2(r^{-1} l_i^{(2)} l_j, r^{-1} l_{i'}^{(2)} l_{j'})_N$ avec $(i,j)\,,(i',j') \in I^*$.

La matrice F_k

F_k se décompose en F_{rk} resp $F_{\theta k}$ resp F_{zk} avec

$$\frac{1}{4} f_r(r_{i'}^{(2)}, \xi_{j'}) \omega_{i'}^{(2)} \rho_{j'} - \mathcal{A}_{k,N}(\tilde{g}^k, \boldsymbol{\ell}_{r,i'j'}), \quad (i', j') \in \mathcal{I}^*.$$
$$\frac{1}{4} f_r(r_{i'}^{(2)}, \xi_{j'}) \omega_{i'}^{(2)} \rho_{j'} - \mathcal{A}_{k,N}(\tilde{g}^k, \boldsymbol{\ell}_{\theta,i'j'}), \quad (i', j') \in \mathcal{I}^*.$$
$$\frac{1}{4} f_r(r_{i'}^{(2)}, \xi_{j'}) \omega_{i'}^{(2)} \rho_{j'} - \mathcal{A}_{k,N}(\tilde{g}^k, \boldsymbol{\ell}_{z,i'j'}), \quad (i', j') \in \mathcal{I}^*.$$

où $\tilde{g}^k = g^k(r_i^{(2)}, \xi_j)$, $(i, j) \in \mathcal{B}$ et 0 si $(i, j) \in \mathcal{I}$

$$\boldsymbol{\ell}_{r,i'j'} = \left(l_{i'}^{(2)} l_{j'}, 0, 0 \right), \boldsymbol{\ell}_{\theta,i'j'} = \left(0, l_{i'}^{(2)} l_{j'}, 0 \right) \text{ et } \boldsymbol{\ell}_{z,i'j'} = \left(0, 0, l_{i'}^{(2)} l_{j'} \right).$$

La matrice B_k

La matrice B_k se décompose en B_{rk}, $B_{\theta k}$ et B_{zk} avec

$$B = \begin{pmatrix} B_{rk} \\ B_{\theta k} \\ B_{zk} \end{pmatrix}.$$

La matrice B_{rk} est constituée d'éléments $b_N(l_{i'}^{(2)} l_{j'}, 0, l_i^{(2)} l_j)$ avec (i, j) et $(i', j') \in I^*$.

La matrice $B_{\theta k}$ est constituée d'éléments $ik(l_i^{(2)} l_j, r^{-1} l_{i'}^{(2)} l_{j'})_N$ avec (i, j) et $(i', j') \in I^*$.

La matrice B_{zk} est constituée d'éléments $b_N(0, l_{i'}^{(2)} l_{j'}, l_i^{(2)} l_j)$ avec (i, j) et $(i', j') \in I^*$.

Cas $k = \pm 1$ Le vecteur $U_\pm$ est constitué par $u_{r,ij}$, $u_{\theta,ij}$ $(i, j) \in I$ et $u_{z,ij}$, $(i, j) \in I^*$

La condition $v_{rN} + ikv_{\theta N} = 0$ sur Γ_0 se traduit par :

$$u_{r,1j} + iku_{\theta,1j} = 0, 1 \leq j \leq N - 1.$$

Ici l'idée est d'introduire une matrice qui injecte cette hypothèse. On l'apellera $R_\pm$ avec

$$\tilde{U}_\pm = R_\pm U_\pm.$$

Le système devient

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{R}_{\pm}^T A_{\pm} Q_{\pm} U_{\pm} + \bar{R}_{\pm}^T B_{\pm} P_{\pm} = R_{\pm}^T F_{\pm} \\ B_{\pm}^T R_{\pm} U_{\pm} = 0 \end{array}\right.$$

Matriciellement le problème s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{R}_{\pm 1}^T A_{\pm 1} R_{\pm 1} & \bar{R}_{\pm 1}^T B_{\pm 1} \\ B_{\pm 1}^T R_{\pm 1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\pm 1} \\ P_{\pm 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\pm 1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Dans un domaine décomposé

Soit $\Omega = \bigcup_{\ell=1}^{L} \Omega_\ell$ La matrice A_k est présentée sous la forme donnée dans (2.6.2) et B_k est de la forme

$$B_k = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_L \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_L \end{pmatrix}$$

où $E_\ell, 1 \leq \ell \leq L$, sont les matrices qui agissent sur les nœuds internes à Ω_ℓ et les matrices $F_\ell, 1 \leq \ell \leq L$ agissent sur la squelette $\mathcal{S}$. On resoud alors le système

$$\begin{aligned} A_k U_k + B_k P_k &= F_k \\ B_k^T P_k &= 0. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

On peut traiter chaque sous domaine par un algorithme itératif.

3.5.3 La matrice des joints

On note Q la matrice qui traduit la condition de transmission aux interfaces des sous-domaines. On ne résout pas le système (3.5.1) parce qu'il comporte de faux degrés de liberté qui sont les valeurs de la solution aux nœuds dits esclaves. Ces noeuds sont éliminés par l'action de la matrice Q^T. Le système global qu'on résout est alors :

$$\begin{aligned} (Q^T A_k Q)\tilde{U}_k + Q^T B_k P_k &= Q^T F_k \\ B_k^T Q P_k &= 0. \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

3.5.4 L'algorithme d'Uzawa

On pose $Q^T A_k Q = \tilde{A}_k$, $Q^T B_k = \tilde{B}_k$ et $Q^T F_k = \tilde{F}_k$.

On calcule d'abord P à l'aide de l'équation $\tilde{B}_k^T \tilde{A}_k^{-1} \tilde{B}_k P_k = \tilde{B}_k^T \tilde{A}_k^{-1} \tilde{F}_k$ ensuite on calcule U_k qui est égale à $\tilde{A}_k^{-1} \tilde{F}_k - \tilde{A}_k^{-1} \tilde{B}_k P_k$.

3.6 *Résultats numériques*

Dans cette section, nous allons présenter comme dans le cas de l'équation de Laplace, des tests numériques. Ces tests confirment bien les résultats théoriques dans les deux cas axisymétrique et général. On se limitera aux deux types de domaines Ω^a et Ω^b.

3.6.1 Cas axisymétrique

Dans ce paragraphe, on commence par faire des tests sur un domaine de référence Ω sans décomposition en sous domaines.

3.6.1.1 Domaine $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$.

1) Pour un premier test on utilise les données suivantes :

$f_r = -45/4r^{3/2}z^2 - 2r^{7/2} - 1, f_z = 3/8r^{1/2}z(25z^2 + 24r^2)$,

$g_r = r^{7/2}z^2, g_z = -3/2r^{5/2}z^3$,

$N = 20$.

Dans les figures 3.6.1, resp 3.6.2 et 3.6.3 on représente les tracés de u_r resp u_z et p.

2) Pour un deuxième test, on considère les données suivantes :

$f_r = -6r, f_z = 16z, g_r = 0, g_z = 0, N = 24$.

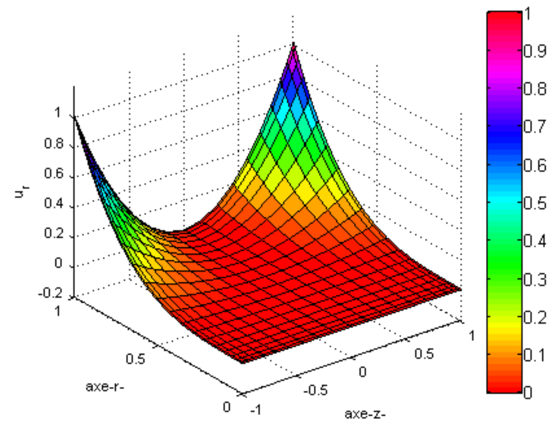

Fig. 3.6.1: Tracé de la fonction u_r

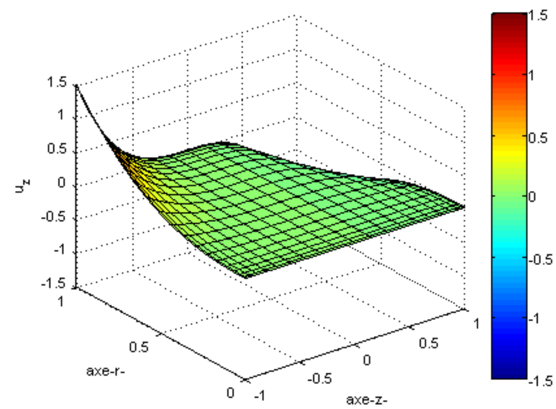

Fig. 3.6.2: Tracé de la fonction u_z

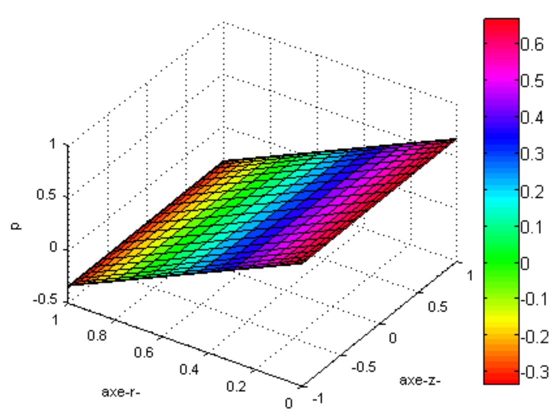

Fig. 3.6.3: Tracé de la fonction p

Dans les figures 3.6.4, 3.6.5 et 3.6.6 on présente les tracés de u_r, u_z et p.

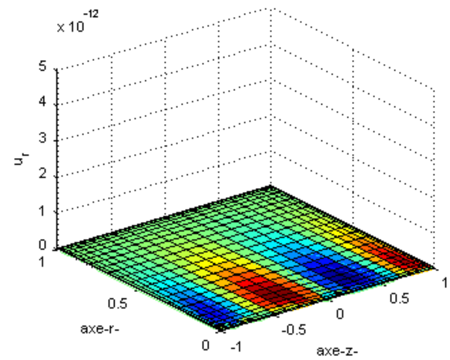

Fig. 3.6.4: Tracé de la fonction u_r

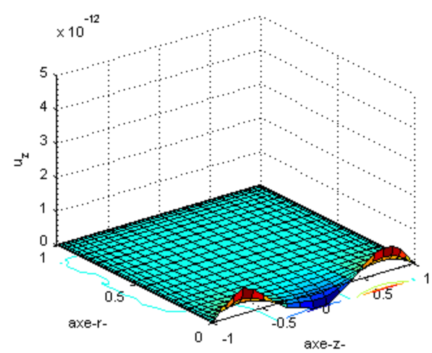

Fig. 3.6.5: Tracé de la fonction u_z

Commentaire : dans ce cas la solution exacte on l'a connait et on a bien $(u_r, u_z) = (0, 0)$.

3.6.1.2 Domaine Ω^a

Soit le domaine Ω^a décomposé en trois sous domaines, voir la figure 2.7.1. On considère les fonctions $f_r = 1, f_z = 0, g_r = r^{7/2}z^2, g_z = -3/2r^{5/2}z^3$, avec $N = 20$ sur Ω, Ω_1^a et Ω_2^a et $N = 22$ sur Ω_3^a. Dans les figures 3.6.7, 3.6.8 et 3.6.9, on représente les tracés de u_r, u_z et p.

Dans les figures 3.6.10, 3.6.11 et 3.6.12, on représente les isovaleurs de u_r, u_z et p.

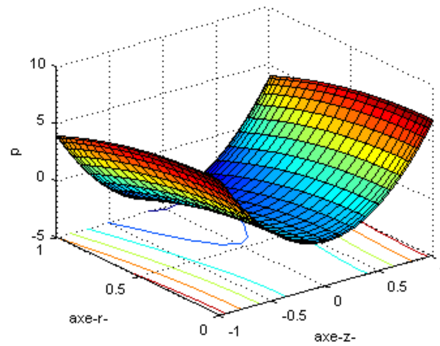

Fig. 3.6.6: Tracé de la fonction p

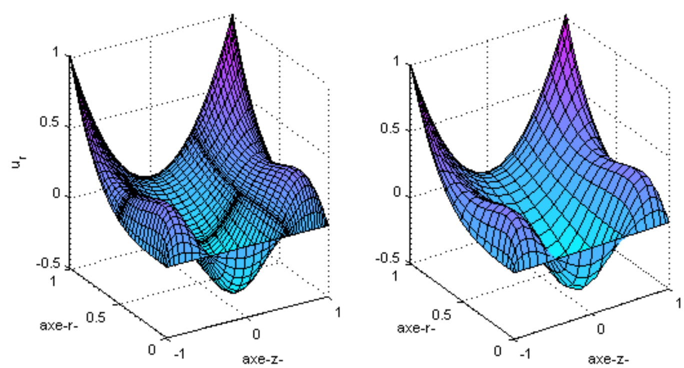

Fig. 3.6.7: Tracé de la fonction u_r

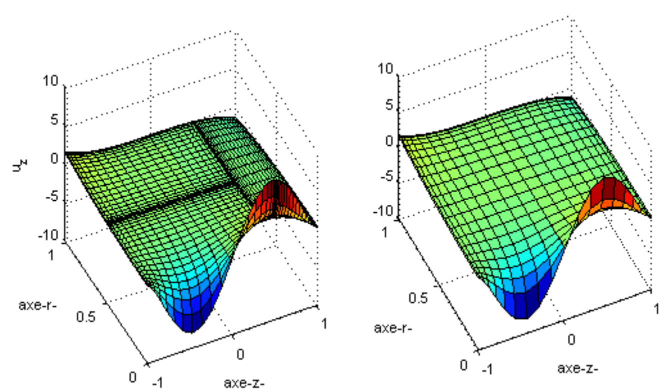

Fig. 3.6.8: Tracé de la fonction u_z

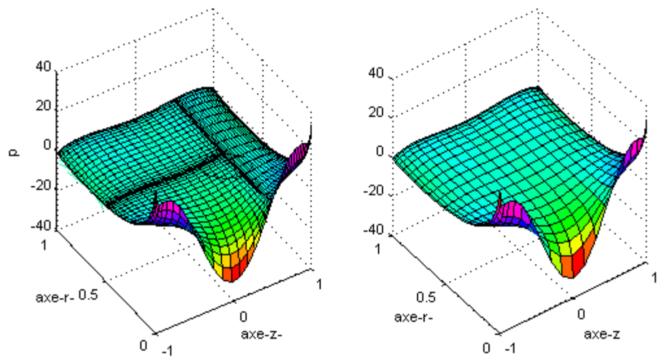

Fig. 3.6.9: Tracé de la fonction p

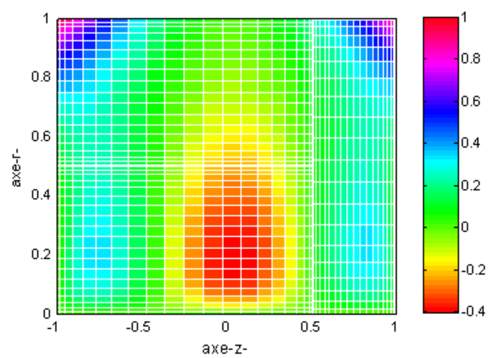

Fig. 3.6.10: Isovaleurs de u_r avec $N = 20$ sur chaque sous domaine

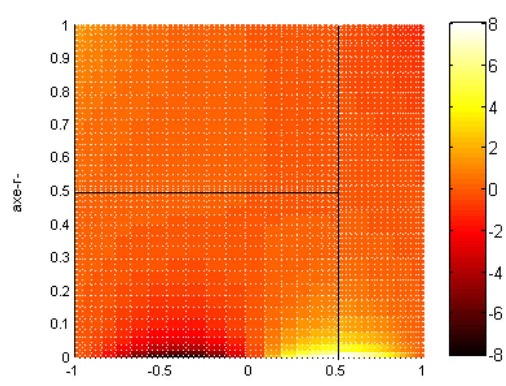

Fig. 3.6.11: Isovaleurs de u_z avec $N = 20$ sur chaque sous domaine

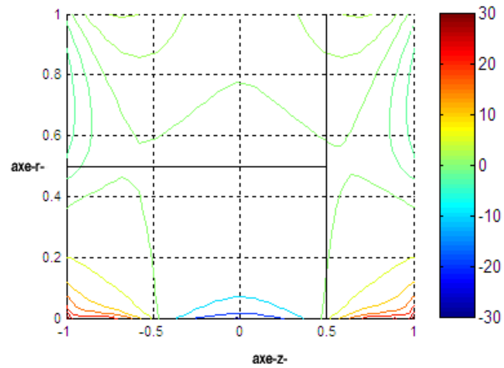

Fig. 3.6.12: Isovaleurs de p avec $N = 20$ sur Ω_1^a, Ω_3^a et $N = 22$ sur Ω_2^a

On remarque l'exellent raccord entre les trois parties du domaine Ω^a et la bonne répartition des couleurs dans les figures 3.6.10 et 3.6.11.

Remarque 3.6.1 *Dans l'exemple précédent la solution exacte n'est pas connue.*

3.6.1.3 Mesures de l'erreur sur le domaine $\breve{\Omega}^a$

On considère les fonctions singulières suivantes :

$$u_r = r^{7/2} z^2, u_z = -3/2 r^{5/2} z^3, p = r^{1/2}.$$

On mesure alors les erreurs $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^a)}$, $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^a)}$ et $\|p - p_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^a)}$, sur $\breve{\Omega}^a$

N	*Norme* L^2*de* p	*Norme* L^2*de* $\boldsymbol{u}$	*Norme* $V_1^1 \times H_1^1$*de* $\boldsymbol{u}$
8	9.8305×10^{-5}	7.4125×10^{-6}	7.5842×10^{-5}
16	3.7346×10^{-6}	4.5674×10^{-8}	1.1940×10^{-6}
20	1.2261×10^{-6}	8.4821×10^{-9}	3.0756×10^{-7}
24	4.8009×10^{-7}	2.1992×10^{-9}	1.0347×10^{-7}
30	1.6068×10^{-7}	4.4262×10^{-10}	2.6800×10^{-8}

On représente alors les courbes $\left(\log_{10}(N), \log_{10} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^a)}\right)$,

$\left(\log_{10}(N), \log_{10} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^a)}\right)$ et $\left(\log_{10}(N), \log_{10} \|p - p_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^a)}\right)$, sur la figure 3.6.13.

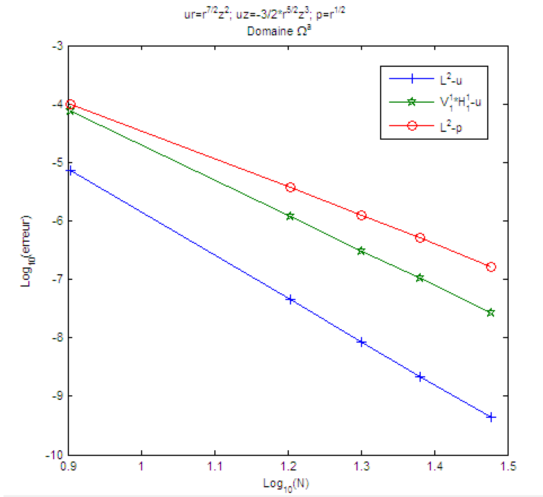

Fig. 3.6.13: Les courbes d'erreur sur $\boldsymbol{u}$ et p

Commentaire : sur la figure 3.6.13, on remarque qu'on obtient des droites ce qui confirme les estimations dans le théorème 3.2.2.

3.6.1.4 Domaine Ω^b

Soit le domaine Ω^b illustré, dans la figure 2.7.5.

On considère les fonctions, $f_r = -6r, f_z = 16z, g_r = r^3, g_z = -4r^2 z$.

On représente dans les figures 3.6.14, resp 3.6.15 et 3.6.16 les tracés de u_r resp u_z et p avec $N = 30$ sur chaque sous domaine.

On représente ensuite dans les figures 3.6.17, resp 3.6.18 et 3.6.19 les isovaleurs de u_r (avec $N = 30$ sur $\Omega_2^b, \Omega_3^b, \Omega_4^b$ et $N = 28$ sur Ω_1^b et Ω_5^b), resp u_z avec $N = 30$ sur chaque sous domaine et p avec $N = 30$ sur $\Omega_2^b, \Omega_3^b, \Omega_4^b$ et $N = 28$ sur Ω_1^b et Ω_5^b.

Commentaire : on remarque dans toutes ces figures l'exellent raccord entre les cinq parties du domaine Ω^b.

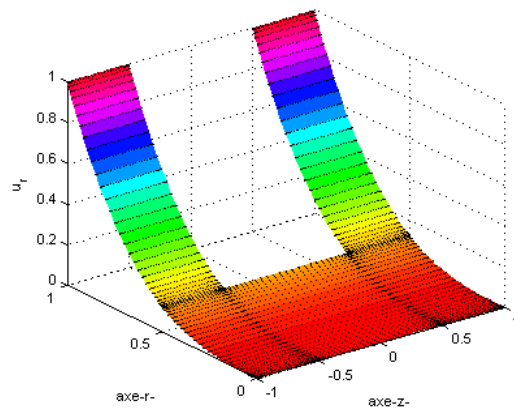

Fig. 3.6.14: Tracé de la fonction u_r, avec $N = 30$ sur chaque sous domaine

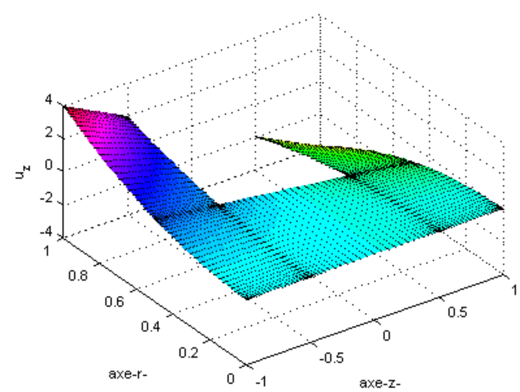

Fig. 3.6.15: Tracé de la fonction u_z

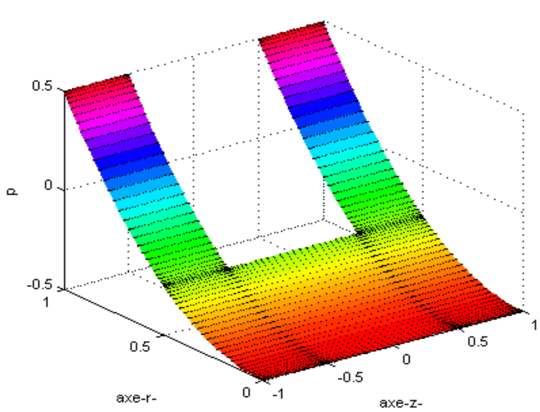

Fig. 3.6.16: Tracé de la fonction p

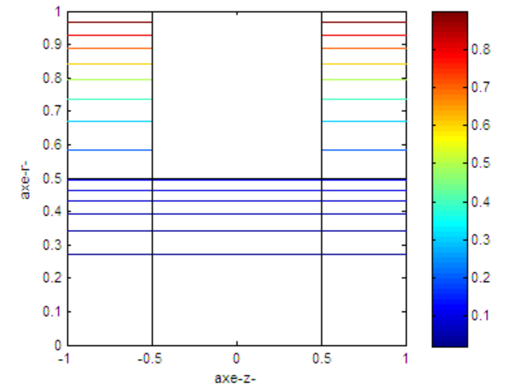

Fig. 3.6.17: Isovaleurs de u_r

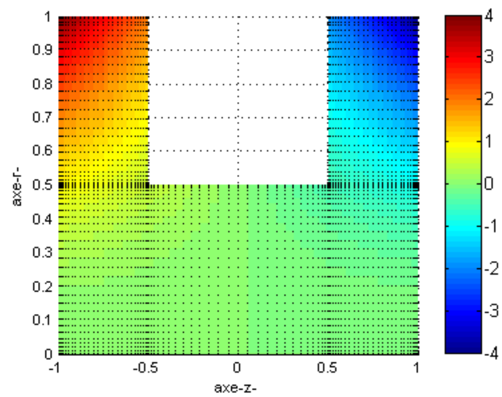

Fig. 3.6.18: Isovaleurs de u_z

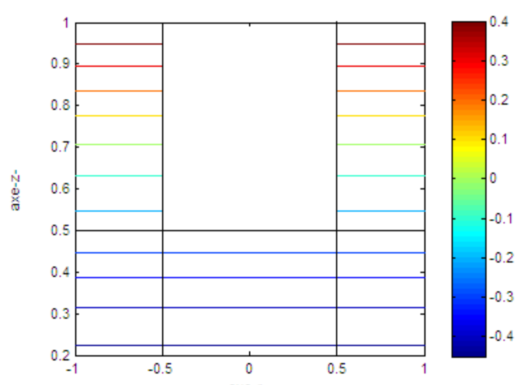

Fig. 3.6.19: Isovaleurs de p

3.6.1.5 Mesures de l'erreur sur le domaine $\breve{\Omega}^b$

On considère maintenant les fonctions suivantes dans le domaine $\breve{\Omega}^b$:

$$u_r = r^{7/2}z^2, u_z = -3/2r^{5/2}z^3, p = -r.$$

On mesure les erreurs $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}$, $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^b)}$ et $\|p - p_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}$, sur $\breve{\Omega}^b$

N	$Norme L^2 de\ p$	$Norme L^2 de\ \boldsymbol{u}$	$Norme V_1^1 \times H_1^1 de\ \boldsymbol{u}$
8	7.0340×10^{-5}	4.4125×10^{-6}	4.1011×10^{-5}
16	3.9970×10^{-6}	4.3193×10^{-8}	1.3043×10^{-6}
20	1.5144×10^{-6}	9.7311×10^{-9}	4.0839×10^{-7}
24	7.0100×10^{-7}	2.8579×10^{-9}	1.5671×10^{-7}
30	2.7460×10^{-7}	6.1090×10^{-10}	4.7943×10^{-8}

Dans la figure 3.6.20, on présente les courbes $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}\right)$, $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^b)}\right)$ et $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|p - p_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}\right)$.

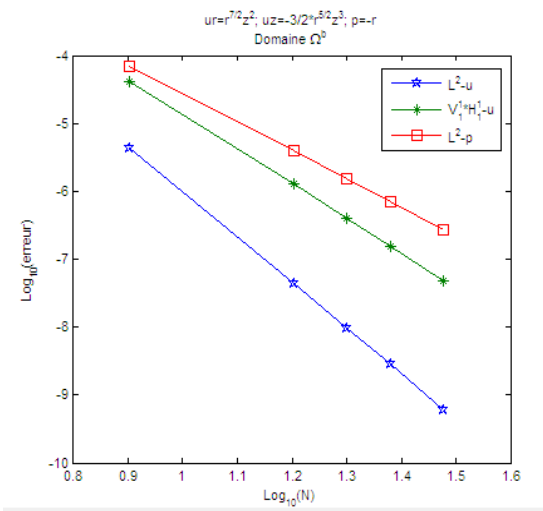

Fig. 3.6.20: Mesures d'erreur sur $\boldsymbol{u}$ et p

Commentaire : on remarque que la courbe de la pression est au dessus de la courbe de la vitesse et ceci est dû au terme β_δ dans les estimations dans le théorème 3.2.2

3.6.2 Cas général

3.6.2.1 Domaine $\breve{\Omega}^a$

On considère pour un premier test les fonctions :

$(f_r, f_\theta, f_z) = (r^{3/2} z cos\theta, r^{5/2} z sin\theta, r z^2 cos^2\theta)$ et $(g_r, g_\theta, g_z) = (0, 0, 0)$.

On représente alors les tracés de u_r^0 *resp* u_θ^0, u_z^0, p^0 (avec $N = 30, K = 8$ sur chaque sous domaine sur les figures) 3.6.21 resp 3.6.22, 3.6.23, 3.6.24, et les tracés de u_r^1 *resp* u_θ^1, u_z^1 (avec $N = 30, K = 8$ sur chaque sous domaine), sur les figures 3.6.25 resp 3.6.26 et 3.6.27.

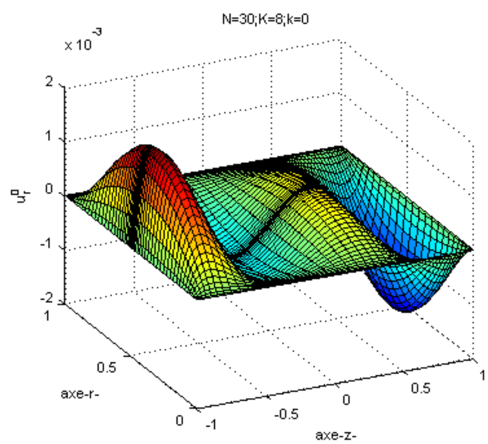

Fig. 3.6.21: Tracé de la fonction u_r^0

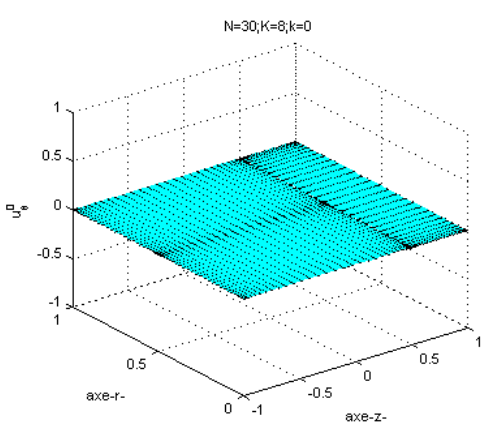

Fig. 3.6.22: Tracé de la fonction u_θ^0

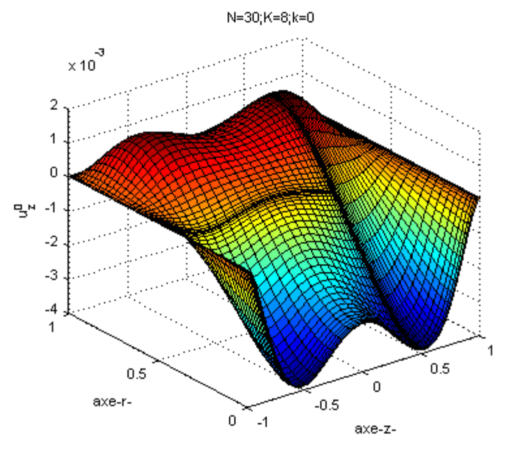

Fig. 3.6.23: Tracé de la fonction u_z^0

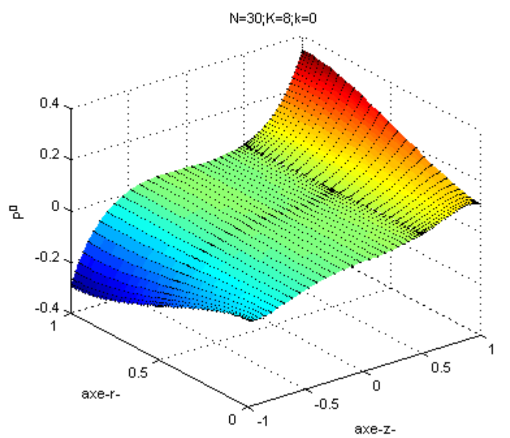

Fig. 3.6.24: Tracé de la fonction p^0

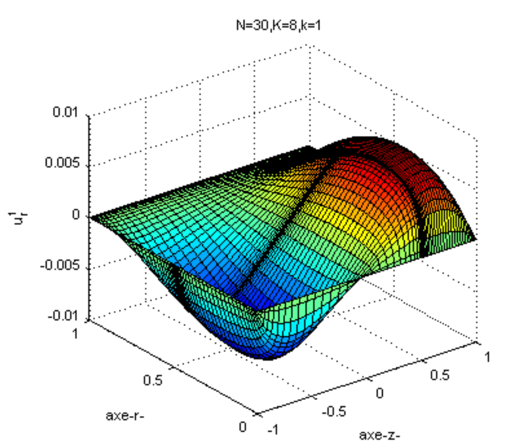

Fig. 3.6.25: Tracé de la fonction u_r^1

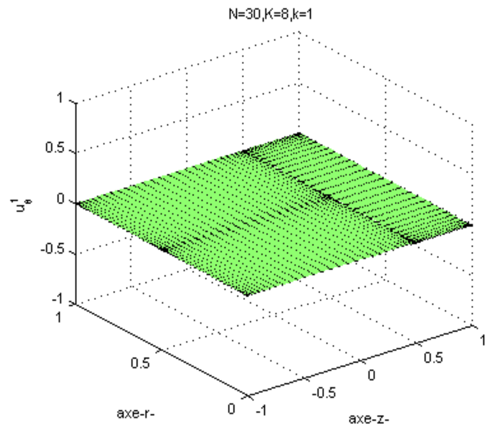

Fig. 3.6.26: Tracé de la fonction u_θ^1

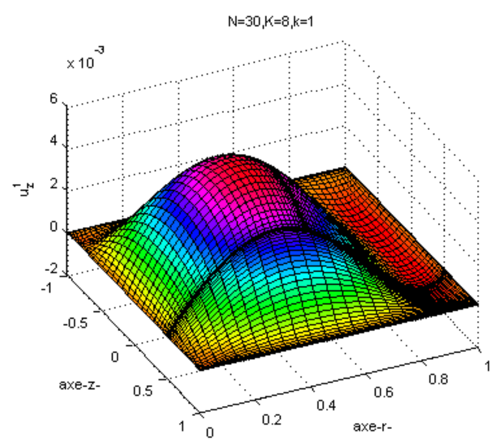

Fig. 3.6.27: Tracé de la fonction u_z^1

On représente ensuite les isovaleurs de u_r^0 (avec $N = 24$ sur Ω_1^a, Ω_2^a,et $N = 28$ sur Ω_3^a et $K = 8$) resp u_z^0, p^0 et p^1(avec $N = 30$ et $K = 8$), sur les figures 3.6.28 resp , 3.6.29, 3.6.30 et 3.6.31.

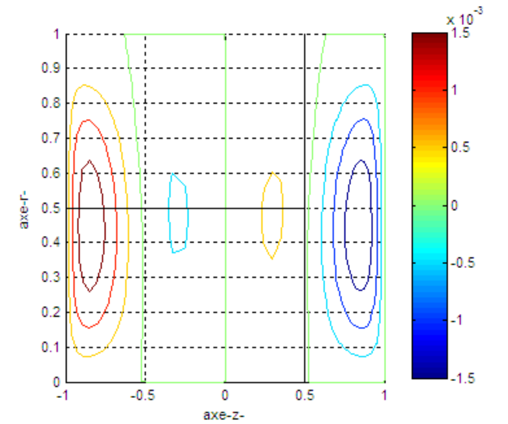

Fig. 3.6.28: Isovaleurs de u_r^0 (avec $N = 24$ sur Ω_1^a, Ω_2^a,et $N = 28$ sur Ω_3^a et $K = 8$)

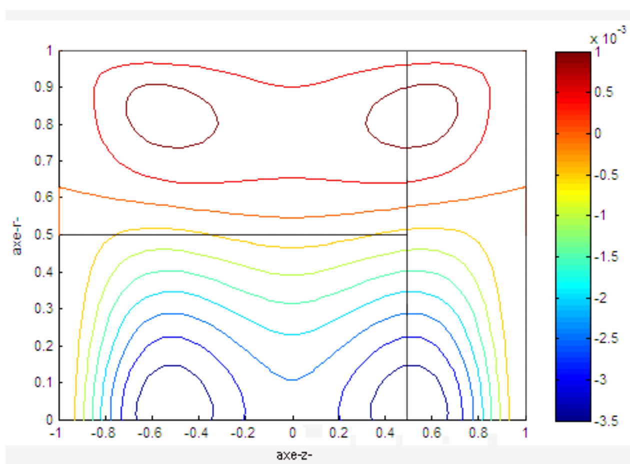

Fig. 3.6.29: Isovaleurs de u_z^0 avec $N = 30, K = 8$

Commentaire : on remarque, comme dans le cas axisymétrique, l'exellente liaison entre les trois parties du domaine Ω^a.

Remarque 3.6.2 *Dans cet exemple, la solution exacte n'est pas connue.*

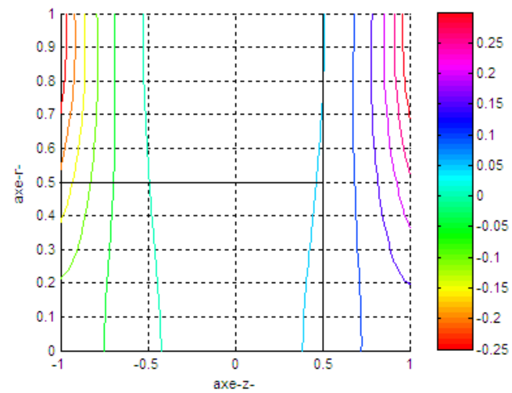

Fig. 3.6.30: Isovaleur de p^0 avec $N = 30, K = 8$

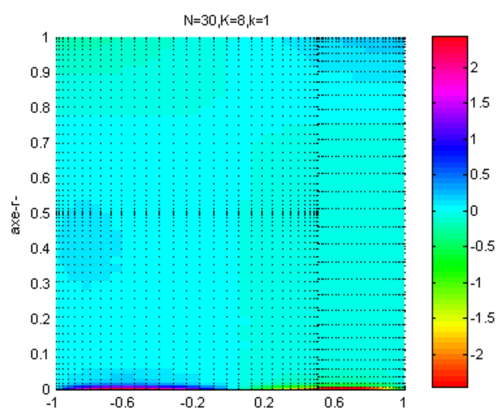

Fig. 3.6.31: Isovaleurs de p^1 avec $N = 30, K = 8$

3.6.2.2 Mesures de l'erreur sur le domaine $\breve{\Omega}^a$

On considère les fonctions suivantes :

$u_x = x^2y^2, u_y = 0, u_z = -2xzy^2$ et $p = (x^2+y^2)^{5/4}(z^2-1)^{3/2}$. On donne alors les courbes $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^a)}\right)$, $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^a)}\right)$ et $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|p-p_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^a)}\right)$, sur le domaine $\breve{\Omega}^a$, sur la figure 3.6.32.

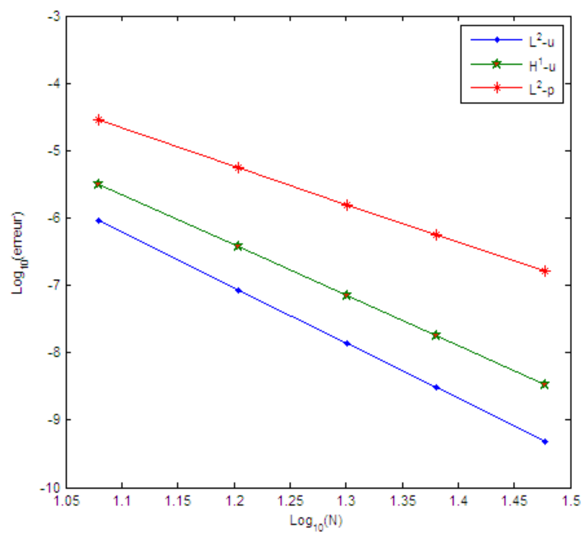

Fig. 3.6.32: Mesures de l'erreur sur $\boldsymbol{u}$ et p

On a la même remarque sur la droite de la pression qui est au dessus de la droite de la vitesse. Le théorème 3.3.1 confirme ce résultat.

3.6.2.3 Domaine $\breve{\Omega}^b$

On considère les fonctions :

$(f_x, f_y, f_z) = (z^2+x^2+y^2, -2xy, -2zx)$ et $(g_x, g_y, g_z) = (0, -xy(1-z^2), 0)$.

On représente les tracés de $u_r^{(1)}$resp Imag$(u_\theta^{(1)}), p^{(1)}$ et $u_r^{(3)}$ $(N = 34, K = 5$ sur chaque sous domaine) sur les figures , 3.6.33 resp 3.6.34, 3.6.35 et 3.6.36.

Dans les figures 3.6.37 resp 3.6.38 on présente les isovaleurs de u_r^0 resp de p^2 et u_θ^2 avec $N = 20,\ K = 5$.

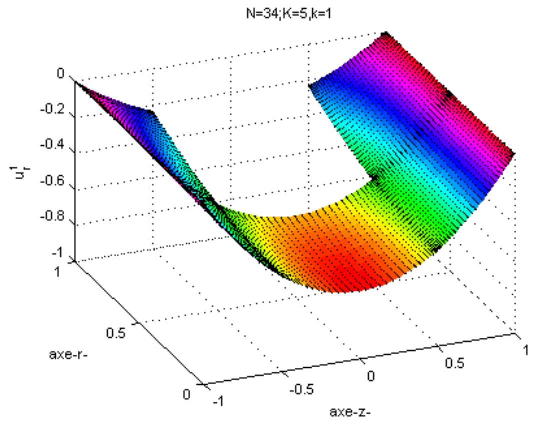

Fig. 3.6.33: Tracé de la fonction u_r^1

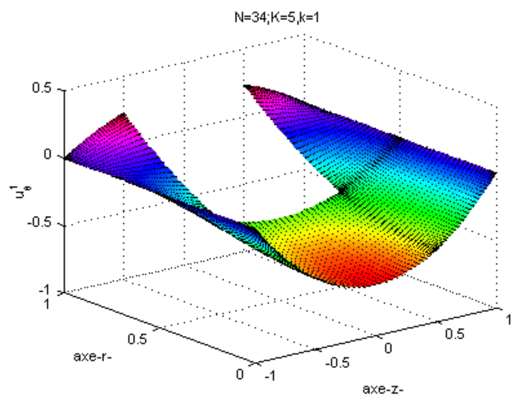

Fig. 3.6.34: Tracé de la partie Imaginaire de u_θ^1

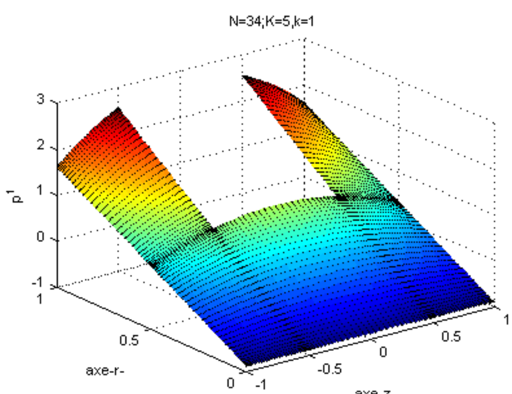

Fig. 3.6.35: Tracé de la fonction p^1

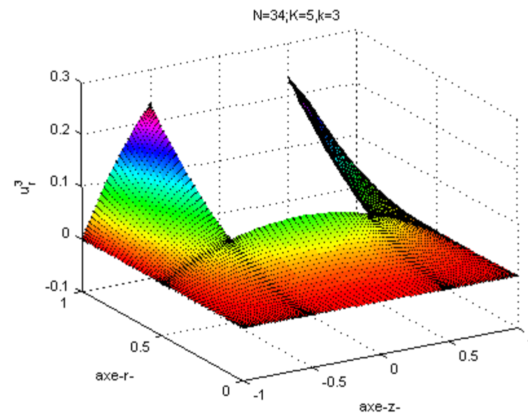

Fig. 3.6.36: Tracé de la fonction u_r^3

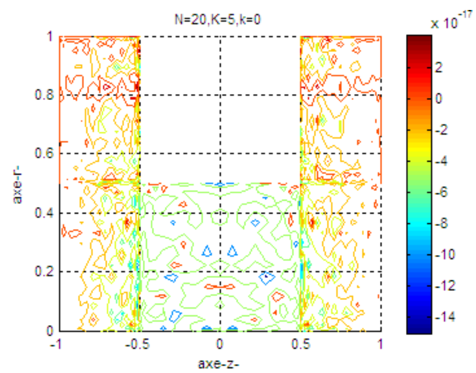

Fig. 3.6.37: Isovaleurs de u_r^0

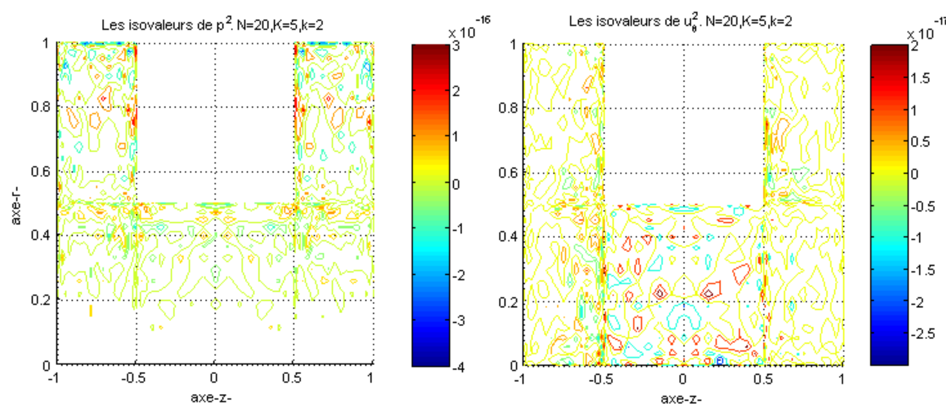

Fig. 3.6.38: Isovaleurs de p^2 et u_θ^2

3.6.2.4 Mesures de l'erreur sur le domaine $\breve{\Omega}^b$

On considère les fonctions suivantes :

$u_x = (x^2+y^2)^{7/3}; u_y = 0; u_z = -\frac{14}{3}(x^2+y^2)^{4/3}xz$ et $p = xz$. Dans la figure 3.6.39, on représente les courbes $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}\right)$, $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_\delta\|_{H^1(\breve{\Omega}^b)}\right)$ et $\left(\log_{10}(N), \log_{10}\|p-p_\delta\|_{L^2(\breve{\Omega}^b)}\right)$, sur le domaine $\breve{\Omega}^b$

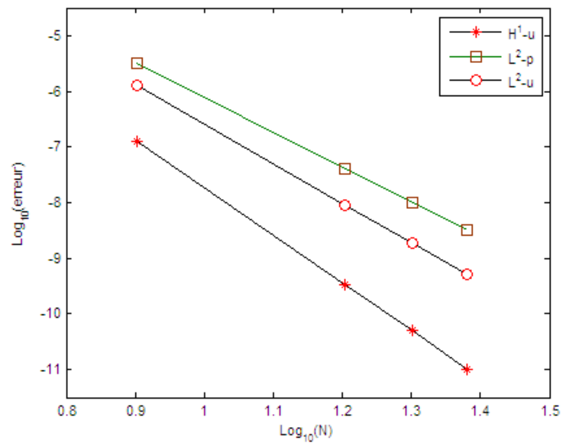

Fig. 3.6.39: Courbes d'erreur de $\boldsymbol{u}$ et p

Conclusion

Dans cette thèse on s'est intéressé aux problèmes tridimensionnels de Laplace et de Stokes dans des domaines axisymétriques. Ces problèmes sont réduits, sans approximation et par des développements en coefficients de Fourier en une famille dénombrable de problèmes bidimensionnels. Les domaines qu'on a considérés présentent des singularités géométriques et sont décomposés de façons non nécessairement conformes. Les non conformités sur les interfaces entre les sous-domaines sont traitées par la méthode des joints. La méthode de base de discrétisation est la méthode spectrale. On a montré alors des résultats d'approximation optimaux, proches de ceux trouvés lors de l'approximation conformes avec des contraintes de continuités sur les interfaces. Ceci prouve encore une fois l'efficacité de la méthode de joints. On a fait en outre plusieurs tests numériques qui ont confirmé nos prédictions théoriques. Quelques remarques sont à signaler concernant ces tests. On note que les erreurs sur la vitesse et sur la pression perdent une partie de l'information théorique sur les interfaces, ceci nous a obligés à augmenter le nombre de nœuds pour avoir une bonne précision. On note aussi qu'après un certain seuil, l'ordre de troncature dans les séries de Fourier n'a plus d'influence sur la convergence de la vitesse et la pression.

Enfin, les techniques utilisées dans ce travail pourraient être généralisées à des géométries axisymétriques plus complexes parfaitement réalistes dans les applications tels que les cones ou les sphères (qui présentent des singularités de coins) ou encore à des fluides ayant des lois de comportements plus complexes tels que ceux régis par les équations de Navier-Stokes.

Chapitre IV

ANNEXE1 : CALCUL DES POLYNÔMES

4.1 Polynômes orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$

On appelle $(L_n)_n$ la famille des polynômes Legendre orthogonaux dans $L^2([-1,1])$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$((1-\zeta^2)L_n')' + n(n+1)L_n = 0 \tag{4.1.1}$$

et

$$\forall\ n\ \geq 0,\ \int_{-1}^{1} L_n(\zeta)\, L_m(\zeta)\, d\zeta = \frac{\delta_{nm}}{n+\frac{1}{2}},$$

en plus on a la relation de recurence :

$$\begin{cases} L_0(\zeta) = 1 \text{ et } L_1(\zeta) = \zeta, \\ (n+1)\, L_{n+1}(\zeta) = (2n+1)\,\zeta L_n(\zeta) - nL_{n-1}(\zeta), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

4.2 Formules de Gauss-Lobatto associées à L_N'

On appelle formule de quadrature de Gauss-Lobatto, la formule de quadrature sur $[-1,1]$ exacte pour les polynômes de degré $\leq 2N-1$ qui s'écrit :

$$\forall \Phi \in P_{2N-1}(\Lambda),\ \int_{-1}^{1} \Phi(\xi)\, d\xi = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\, \rho_j$$

où les points d'intégration sont

$$\begin{array}{l} \xi_0 = -1 \quad \xi_N = 1 \quad \xi_j,\ 1 \leq j \leq N-1 \text{ sont les zeros du polynôme } L_N' \\ \rho_0 = \rho_N = \frac{2}{N(N+1)} \quad \rho_j = \frac{2}{N(N+1)L_N^2(\xi_j)}\ 1 \leq j \leq N-1 \text{ sont les poids associés} \end{array} \tag{4.2.1}$$

4.3 Polynômes orthogonaux dans $L_1^2(\Lambda)$

On définit une famille de polynômes $(M_n)_n$ par :

$$M_n(\zeta) = \frac{L_n(\zeta) + L_{n+1}(\zeta)}{1+\zeta}, \; n \geq 0.$$

Ces polynômes vérifient l'équation différentielle :

$$((1+\zeta)^2(1-\zeta)M_n')' + n(n+2)(1+\zeta)M_n = 0 \tag{4.3.1}$$

et sont orthogonaux dans $L_1^2([-1,1])$ et vérifient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} M_n(\zeta)\, M_m(\zeta)\,(1+\zeta)\,d\zeta &= 0 \;\; et \;\; M_n(1) = 1.\\ \int_{-1}^{1} M_n^2(\zeta)\,(1+\zeta)\,d\zeta &= \frac{2}{n+1},\end{aligned}$$

et la formule de recurrence :

$$\begin{cases} M_0(\zeta) = 1 \;\; \text{et} \;\; M_1(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta - 1), \\ \frac{n+2}{2n+3} M_{n+1}(\zeta) = \left(\zeta - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right) M_n(\zeta) - \frac{n}{2n+1} M_{n-1}(\zeta), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

4.4 Formules de Gauss-Lobatto associées à M_N'

Ce sont des formules de quadrature à $N+1$ points exactes sur $P_{2N-1}([-1,1])$ qui s'écrivent :

$$\forall \Phi \in P_{2N-1}(\Lambda), \; \int_{-1}^{1} \Phi(\zeta)\,(1+\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=1}^{N+1} \Phi(\zeta_j^{(2)})\omega_j^{(2)},$$

où

$$\begin{aligned}&\zeta_1^{(2)} = -1 \quad \zeta_{N+1}^{(2)} = 1 \quad \zeta_j^{(2)}, \; 2 \leq j \leq N \;\; \text{sont les zéros du polynôme } M_N' \\ &\omega_1^{(2)} = \frac{8}{N(N+2)M_N^2(-1)} \qquad \omega_j^{(2)} = \frac{4}{N(N+2)M_N^2(\zeta_j^{(2)})}, \; 2 \leq j \leq N+1 \;\; \text{sont les poids associés}\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

4.5 Polynômes de Lagrange

4.5.1 Explicitation de $l_j^{(2)}$

On note $l_j^{(2)}$ le j-ième polynôme de base de Lagrange associé aux zéros de $(1-\zeta^2)M_N'$, on a la proposition suivante.

Proposition 4.5.1 *Le polynôme $l_j^{(2)}$ de Lagrange, associé aux zéros de $(1-\zeta^2)M_N'$ vérifie*

$$l_i^{(2)}(\zeta) = \begin{cases} -\frac{(1-\zeta^2)M_N'}{N(N+2)M_N(\zeta_i^{(2)})(\zeta-\zeta_i^{(2)})} & \text{si } 2 \leq i \leq N \text{ et } \zeta \neq \zeta_j \\ (-1)^{N+1}\frac{2(1-\zeta)M_N'(\zeta)}{N(N+1)(N+2)} & \text{si } \ i=1 \\ \frac{(1+\zeta)M_N'(\zeta)}{N(N+2)} & \text{si } \ i=N+1 \\ \delta_{ij} & \text{si } \zeta=\zeta_j \text{ et } 1 \leq j \leq N+1. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Preuve Par définition de $l_i^{(2)}$, on a $l_i^{(2)}(\xi_j)=\delta_{ij}, 1 \leq j \leq N+1$ et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$l_i^{(2)}(\zeta) = c\frac{(1-\zeta^2)M_N'}{(\zeta-\zeta_i)} \tag{4.5.2}$$

Il reste à calculer c pour que $\lim\limits_{\zeta\to\zeta_i} l_i^{(2)}(\zeta)$ soit égal à 1.

1) Si $2 \leq i \leq N$ un développement de Taylor donne que $\lim\limits_{\zeta\to\zeta_i^{(2)}} \frac{M_N'(\zeta)}{(\zeta-\zeta_i^{(2)})} = M_N''(\zeta_i)$. D'autre part, la formule (4.3.1) donne $M_N''(\zeta_i) = -\frac{N(N+2)M_N(\zeta_i)}{(1-\zeta_i^2)}$. On remplace dans (4.5.2), on trouve alors

$$l_i^{(2)}(\zeta) = -\frac{(1-\zeta^2)M_N'}{N(N+2)M_N(\zeta_i)(\zeta-\zeta_i)}.$$

2) Si $i=1$ on utilise (4.3.1) pour $\zeta=\zeta_1=-1$, on obtient $M_N'(-1) = -\frac{N(N+2)M_N(-1)}{4}$, où $M_N(-1)=(-1)^N(N+1)$. On remplace $M_N'(-1)$ dans (4.5.2), on trouve le résultat.

3) Si $i=N+1$ on utilise (4.3.1) pour $\zeta=\zeta_{N+1}=1$, on obtient $M_N'(1) = \frac{N(N+2)}{2}M_N(1)$, où $M_N(1)=1$. On remplace $M_N'(1)$ dans (4.5.2), on trouve le résultat.

■

Proposition 4.5.2 *Soit $l_j^{(2)}$ les polynômes de Lagrange associés aux zéros de $(1-\zeta^2)M_N'$. Alors on a :*

$$l_i^{\prime(2)}(\zeta_j) = \begin{cases} \frac{M_N(\zeta_j)}{M_N(\zeta_i)(\zeta_j-\zeta_i)} & si\ 2 \le i \le N\ \ et\ j \neq i \\ -\frac{1}{2(1+\zeta_i)} & si\ 2 \le i \le N\ \ et\ \ j = i \\ \frac{2(-1)^N M_N(\zeta_j)}{(N+1)(1+\zeta_j)} & si\ i=1\ \ et\ \ j \neq i \\ -\frac{N(N+2)}{6} & si\ i=1\ \ et\ \ j=1 \\ -\frac{M_N(\zeta_j)}{(1-\zeta_j)} & si\ i=N+1\ \ et\ j\neq i \\ \frac{N(N+1)^2(N+2)}{4}+1 & si\ i=N+1\ \ et\ j=i. \end{cases} \tag{4.5.3}$$

Preuve D'après la proposition précédente on a

1) Si $2 \le i \le N$, $l_i^{(2)}(\zeta) = -\frac{(1-\zeta^2)M_N'}{N(N+2)M_N(\zeta_i^{(2)})(\zeta-\zeta_i^{(2)})}$.

a) On dérive $\Big((1+\zeta)(\zeta-\zeta_i)l_i^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta=\zeta_j$ avec $j \neq i$, on obtient $l_i^{(2)\prime}(\zeta_j) = \frac{M_N'(\zeta_j^{(2)})}{M_N(\zeta_i^{(2)})(\zeta_j-\zeta_i^{(2)})}$.

b) On dérive deux fois $\Big((1+\zeta)(\zeta-\zeta_i)l_i^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta=\zeta_i$, on obtient $l_i^{(2)\prime}(\zeta_i) = -\frac{1}{2(1+\zeta_i^{(2)})}$.

2) Si $i=1$, on a $l_1^{(2)}(\zeta) = (-1)^{N+1}\frac{2(1-\zeta)M_N'(\zeta)}{N(N+1)(N+2)}$.

a) On dérive $\Big((1+\zeta)^2 l_i^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta=\zeta_j$ avec $j\neq i$, on obtient $l_1^{(2)\prime}(\zeta_j) = \frac{2(-1)^N M_N(\zeta_j^{(2)})}{(N+1)(1+\zeta_j^{(2)})}$.

b) On dérive trois fois $\Big((1+\zeta)^2 l_i^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta=\zeta_1=-1$, on obtient $l_1^{(2)\prime}(\zeta_1) = -\frac{N(N+2)}{6)}$.

3) Si $i=N+1$, on a $l_{N+1}^{(2)}(\zeta) = \frac{(1+\zeta)M_N'(\zeta)}{N(N+2)}$

a) On dérive $\Big((1-\zeta)l_{N+1}^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta=\zeta_j$ avec $j\neq i$, on obtient $l_{N+1}^{(2)\prime}(\zeta_j) = -\frac{M_N(\zeta_j^{(2)})}{(1-\zeta_j^{(2)})}$.

b) On dérive deux fois $\Big((1-\zeta)l_{N+1}^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta=\zeta_{N+1}=1$, on obtient $l_{N+1}^{(2)\prime}(1) = \frac{N(N+1)^2(N+2)}{4}+1$.

On note m_j le polynôme de base de Lagrange associé à ζ_j, $1\le j\le N-1$ ζ_j étant les zéros de L_N'. ∎

Proposition 4.5.3 *Soit $l_j^{(2)}$ le polynômes de Lagranges associés à $(1-\zeta)M_N'$. Alors on a :*

$$l_i^{(2)\prime\prime}(\zeta_j) = \begin{cases} \frac{(\zeta_i-3\zeta_j-2)M_N(\zeta_j)}{(1+\zeta_j)(\zeta_j-\zeta_i)^2 M_N(\zeta_j)} & si\ 2 \leq i \leq N\ \ et\ j \neq i \\ \frac{1}{(1+\zeta_i)^2} - \frac{N(N+2)}{3(1-\zeta_i^2)} & si\ 2 \leq i \leq N\ \ et\ j = i \\ \frac{(-1)^N 6M_N(\zeta_j)}{(N+1)(1+\zeta_j)^2} & si\ i = 1\ \ et\ 2 \leq j \leq N \\ \frac{(N-1)N(N+1)(N+3)}{32} & si\ i = 1\ \ et\ j = 1 \\ \frac{(-1)^N(N-1)(N+3)}{2(N+1)} & si\ i = 1\ \ et\ j = N+1 \\ -\frac{(1+3\zeta_j)M_N(\zeta_j)}{(1+\zeta_j)(1-\zeta_j)^2} & si\ i = N+1\ \ et\ 2 \leq j \leq N \\ \frac{(-1)^N(N+1)(N^2+2N-6)}{12} & si\ i = N+1\ \ et\ j = 1 \\ \frac{(N+1)^2(3N^2+6N+2)}{12} + 1 & si\ i = N+1\ \ et\ j = i \end{cases} \tag{4.5.4}$$

Preuve 1)

a) On dérive deux fois $\Big((1+\zeta)(\zeta-\zeta_i)l_i^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta = \zeta_j$ avec $j \neq i$, on obtient $l_i^{(2)\prime\prime}(\zeta_j) = \frac{(\zeta_i-3\zeta_j-2)M_N(\zeta_j)}{(1+\zeta_j)(\zeta_j-\zeta_i)^2 M_N(\zeta_j)}$.

b) On dérive trois fois $\Big((1+\zeta)(\zeta-\zeta_i)l_i^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta = \zeta_i$, on obtient $l_i^{(2)\prime\prime}(\zeta_j) = \frac{1}{(1+\zeta_i)^2} - \frac{N(N+2)}{3(1-\zeta_i^2)}$.

2)

a) On dérive deux fois $\Big((1+\zeta)^2 l_1^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta = \zeta_j$ avec $j \neq i$ et $2 \leq j \leq N+1$, on obtient $l_1^{(2)\prime\prime}(\zeta_j) = \frac{(-1)^N 6M_N(\zeta_j)}{(N+1)(1+\zeta_j)^2}$ et $l_1^{(2)\prime\prime}(1) = \frac{(-1)^N(N-1)(N+3)}{2(N+1)}$.

b) On dérive trois fois $\Big((1+\zeta)^2 l_1^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta = \zeta_1$, on obtient $l_1^{(2)\prime\prime}(-1) = \frac{(N-1)N(N+1)(N+3)}{32}$.

3) On dérive deux fois $\Big((1-\zeta^2)l_{N+1}^{(2)}(\zeta)\Big)$ et on utilise (4.3.1). On pose $\zeta = \zeta_j$ avec $j \neq i$ et $1 \leq j \leq N$, on obtient $l_{N+1}^{(2)\prime\prime}(\zeta_j) = -\frac{(1+3\zeta_j)M_N(\zeta_j)}{(1+\zeta_j)(1-\zeta_j)^2}$ ■

4.5.2 Explicitation de m_j

On note m_j le polynôme de base de Lagrange associé à ξ_j, $1 \leq j \leq N-1$ ξ_j étant les zéros de L_N' .

Proposition 4.5.4 *On a*

$$m_j'\left(\xi_q\right)=\begin{cases}\frac{(1-\xi_j^2)L_N\left(\xi_q\right)}{L_N\left(\xi_j\right)\left(1-\xi_q^2\right)\left(\xi_q-\xi_j\right)} & si\ j\neq q\\ \frac{2\xi_j}{\left(1-\xi_j^2\right)} & si\ \ j=q.\end{cases}$$

Preuve On remarque que, d'après (4.1.1), on a :

$$m_j\left(\xi\right)=-\frac{\left(1-\xi_j^2\right)L_N'\left(\xi\right)}{N(N+1)L_N\left(\xi_j\right)\left(\xi-\xi_j\right)},\ \text{pour } \xi\neq\xi_j \text{ et } 1\leq j\leq N$$

On en déduit que :

$$m_j\left(-1\right)=-\frac{\left(1-\xi_j\right)}{2L_N\left(\xi_j\right)}L_N\left(-1\right) \tag{4.5.5}$$

et

$$m_j\left(1\right)=-\frac{\left(1+\xi_j\right)}{2L_N\left(\xi_j\right)}. \tag{4.5.6}$$

On dérive le polynôme $\left(1-\xi^2\right)\left(\xi-\xi_j\right)m_j(\xi)$ deux fois et on utilise (4.1.1), on trouve :

$$m_j'\left(\xi_q\right)=\frac{(1-\xi_j^2)L_N'\left(\xi_q\right)}{2L_N\left(\xi_j\right)\left(-3\xi_q^2+2\xi_j\xi_q+1\right)}\left[1+\frac{\left(2\xi_j-6\xi_q\right)}{N\left(N+1\right)\left(\xi_q-\xi_j\right)}\right],\ \text{pour } q=0 \text{ ou } N,$$

en remplaçant q par N et 0, on obtient

$$m_j'\left(1\right)=\frac{\left(1+\xi_j\right)}{4L_N\left(\xi_j\right)}\left(-L_N'\left(1\right)+L_N\left(1\right)\frac{\left(3-\xi_j\right)}{\left(1-\xi_j\right)}\right) \tag{4.5.7}$$

et

$$m_j'\left(-1\right)=-\frac{\left(1-\xi_j\right)}{4L_N\left(\xi_j\right)}\left(L_N'\left(-1\right)+\frac{L_N\left(-1\right)\left(3+\xi_j\right)}{\left(1+\xi_j\right)}\right). \tag{4.5.8}$$

Pour $1\leq q\leq N-1$ on trouve

$$m_j'\left(\xi_q\right)=\frac{\left(1-\xi_j^2\right)L_N\left(\xi_q\right)}{\left(1-\xi_q^2\right)\left(\xi_q-\xi_j\right)L_N\left(\xi_j\right)}\ \text{pour } j\neq q$$

et

$$m_j'\left(\xi_j\right)=\frac{2\xi_j}{\left(1-\xi_j^2\right)}.$$

■

4.5.2.1 Explicitation de $m_i^{(2)}$

Proposition 4.5.5 *Soit $m_i^{(2)}$ le ième polynôme de base de Lagrange associé aux nœuds de $\left(\zeta_i^2\right), 2 \leq i \leq N$. Alors on a :*

$$m_i^{\prime(2)}\left(\zeta_p\right) = \frac{\left(1-\zeta_i^2\right)M_N\left(\zeta_q\right)}{\left(1-\zeta_p^2\right)M_N(\zeta_i)\left(\zeta_p-\zeta_i\right)} \text{ pour } p \neq i$$
$$m_i^{\prime(2)}\left(\zeta_i\right) = \frac{5\zeta_i-1}{2\left(1-\zeta_i^2\right)}.$$

Preuve On remarque que, d'après (4.3.1) on a

$$m_i^{(2)}(\zeta) = -\frac{\left(1-\zeta_i^2\right)M_N'(\zeta)}{N(N+2)M_N\left(\xi_i\right)\left(\zeta-\zeta_i\right)}, \text{ pour } \zeta \neq \zeta_i \text{ et } 2 \leq i \leq N+1$$

On en déduit que :

$$m_i^{(2)}(1) = -\frac{\left(1+\zeta_i\right)M_N(-1)}{2M_N\left(\zeta_i\right)} \tag{4.5.9}$$

et

$$m_i^{(2)}(-1) = -\frac{\left(1-\zeta_i\right)M_N(-1)}{4M_N\left(\zeta_i\right)}. \tag{4.5.10}$$

On dérive le polynôme $\left(1-\zeta^2\right)(1+\zeta)\left(\zeta-\zeta_j\right)m_i^{(2)}(\xi)$ deux fois et on utilise (4.3.1), on trouve alors

$$m_i^{\prime(2)}(1) = \frac{\left(\zeta_i+1\right)}{4\left(\zeta_i-1\right)M_N\left(\zeta_i\right)}\left(\left(1-\zeta_i\right)M_N'(1) + \frac{\left(3\zeta_i-7\right)M_N(1)}{2}\right) \tag{4.5.11}$$

et

$$m_i^{\prime(2)}(-1) = -\frac{\left(1-\zeta_i\right)}{6\left(1+\zeta_i\right)M_N\left(\zeta_i\right)}\left(\left(1+\zeta_i\right)M_N'(-1) + \frac{\left(9+3\zeta_i\right)M_N(-1)}{4}\right) \tag{4.5.12}$$

Pour $2 \leq p \leq N$ on trouve

$$m_i^{\prime(2)}\left(\zeta_p\right) = \frac{\left(1-\zeta_i^2\right)M_N\left(\zeta_q\right)}{\left(1-\zeta_p^2\right)M_N\left(\zeta_i\right)\left(\zeta_p-\zeta_i\right)} \text{ pour } p \neq i$$

et

$$m_i^{\prime(2)}\left(\zeta_i\right) = \frac{5\zeta_i-1}{2\left(1-\zeta_i^2\right)}.$$

■

4.5.3 Ecriture des intégrales dans un rectangle $[a,b]\times[c,d]$

Lemme 4.5.1 *On a*

$$\omega' = (\frac{b-a}{2})^2\omega \ \ et\ \rho' = (\frac{d-c}{2})\rho.$$

où ω' resp ρ' sont les poids associés à ζ resp ξ dans un rectangle $[a,b]\times[c,d]$.

Preuve Ces formules s'obtiennent simplement en faisant le changement de variable

1) On pose $\zeta' = (\frac{b-a}{2})\zeta + (\frac{b+a}{2})$ et $\tilde{u}(\zeta') = u(\zeta)$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{u}(\zeta')\tilde{v}(\zeta')(\zeta'-a)\partial\zeta' &= (\frac{b-a}{2})^2\int_{-1}^1 u(\zeta)v(\zeta)(1+\zeta)\partial\zeta \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} u(\zeta_i)v(\zeta_i)(\frac{b-a}{2})^2\omega_i \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} \tilde{u}(\zeta_i')\tilde{v}(\zeta_i')\omega_i'\end{aligned}$$

d'où

$$\omega_i' = (\frac{b-a}{2})^2\omega_i.$$

2) Soit $\xi \in\,]-1,1[$ et $\xi' \in\,]c,d[$. On pose $\xi' = (\frac{d-c}{2})\xi + (\frac{d+c}{2})$ *et* $\tilde{u}(\xi') = u(\xi)$. On alors

$$\begin{aligned}\int_c^d \tilde{u}(\xi')\tilde{v}(\xi')\partial\xi' &= \sum_{i=0}^{N} \tilde{u}(\xi_i')\tilde{v}(\xi_i')\rho_i' \\ &= \int_{-1}^1 u(\xi)v(\xi)(\frac{d-c}{2})\partial\xi \\ &= \sum_{i=0}^{N} u(\xi_i)v(\xi_i)(\frac{d-c}{2})\rho_i\end{aligned}$$

d'où

$$\rho_i' = (\frac{d-c}{2})\rho_i.$$

■

On déduit du lemme précédent que les produits scalaires sur $[a,b]$ et $[c,d]$ s'écrivent respectivement

$$
\begin{aligned}
((\tilde{u}_{\zeta'}, \tilde{v}_{\zeta'}))_N &= (\frac{b-a}{2})^2 \left((u_\zeta, v_\zeta)\right)_N \\
((\tilde{u}_{\xi'_i}, \tilde{v}_{\xi'_i}))_N &= (\frac{d-c}{2}) \left((u_{\xi_i}, v_{\xi_i})\right)_N .
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
((\partial_{\zeta'}\tilde{u}, \partial_{\zeta'}\tilde{v}))_N &= \left((\partial_\zeta u, \partial_\zeta v)\right)_N \\
\left((\partial_{\xi'}\tilde{u}, \partial_{\xi'}\tilde{v})\right)_N &= \frac{2}{d-c} \left((\partial_\xi u, \partial_\xi v)\right)_N .
\end{aligned}
$$

4.6 Mise en œuvre du Laplacien et du problème de Stokes

4.6.1 Calcul de la matrice A

Lemme 4.6.1 *Pour tout $i \geq 2$, $p \leq N$ et $1 \leq j, q \leq N-1$, on a*

$$((\frac{l_p^{(2)} l_q}{r}, \frac{l_{p'}^{(2)} l_{q'}}{r}))_N = \frac{1}{4} \frac{\delta_{qq'}\delta_{pp'}}{r_p^2} \omega_p \rho_q.$$

Lemme 4.6.2 *Pour tout $2 \leq i$, $p \leq N$,$1 \leq j$ et $q \leq N-1$, on a*

$$((\partial_z l_p^{(2)} l_q, \partial_z l_{p'}^{(2)} l_{q'}))_N = \frac{1}{4} \delta_{pp'} \omega_p \alpha_{qq'},$$

où

$$
\begin{cases}
\alpha_{qq'} = \alpha_{q'q} = \frac{4}{N(N+1)L_N(\xi_q)L_N(\xi_{q'})(\xi_q - \xi_{q'})^2} & 0 \leq q < q' \leq N \\
\alpha_{qq} = \frac{2}{3(1-\xi_q^2)L_N^2(\xi_q)} \quad 1 \leq q \leq N-1 \\
\alpha_{00} = \alpha_{NN} = \frac{N^2+N+1}{6}
\end{cases}
$$

Pour la preuve, voir [21].

Lemme 4.6.3 *On a*

$$((\partial_r l_p^{(2)} l_q, \partial_r l_{p'}^{(2)} l_{q'}))_N = \frac{1}{4}\delta_{qq'}\rho_q\beta_{pp'},$$

et trois cas se distinguent.

1) Si $2 \leq p,\, p' \leq N$ et $1 \leq q,\, q' \leq N-1$ on a

$$\beta_{pp'} = \begin{cases} \frac{8}{N(N+2)M_N\left(\zeta_p\right)M_N(\zeta_{p'})(\zeta_p-\zeta_{p'})^2} & p \neq p', \\ \omega_p\left[\frac{N(N+2)}{3\left(1-\zeta_p^2\right)} - \frac{1}{2\left(1+\zeta_p\right)^2}\right] & p = p'. \end{cases}$$

2) Si $p = 1$ et $2 \leq p' \leq N$ et $1 \leq q,\, q' \leq N-1$ on a

$$\beta_{1p'} = \frac{64}{N\,(N+2)\,M_N\left(\zeta_{p'}\right)M_N(\zeta_1)(1+\zeta_{p'})^2}.$$

3) Si $p = p'$ et $1 \leq q,\, q' \leq N-1$ on a

$$\beta_{11} = 2 + \frac{4}{M_N^2(-1)}(3 - N\,(N+2)).$$

Preuve La formule d'exactitude, donne pour 1) et 2)

$$((\partial_r l_p^{(2)} l_q, \partial_r l_{p'}^{(2)} l_{q'}))_N = -\frac{1}{4}\delta_{qq'}\omega_{p'}\rho_{q'}\left(l_{p'}^{(2)\prime\prime}(r_{p'}) + \frac{l_{p'}^{(2)\prime}(r_{p'})}{r_{p'}}\right) \tag{4.6.1}$$

Pour 3) On a

$$((\partial_r l_1^{(2)} l_q, \partial_r l_1^{(2)} l_{q'}))_N = -\delta_{qq'}\rho_{q'}\left(\frac{1}{4}l_1^{(2)\prime\prime}(r_1) + \left[\frac{l_1^{(2)}(r)}{2}\right]_0^1\right)$$

On utilise (4.2.1) (4.4.1) (4.5.3) et (4.5.4) pour conclure. ■

4.6.2 Ecriture de a_N, a_N^k

On a

$$((\partial_{\zeta'}\tilde{l}_p^2\tilde{l}_q, \partial_{\zeta'}\tilde{l}_{p'}^2\tilde{l}_{q'}))_N = ((\partial_\zeta l_p^2, \partial_\zeta l_{p'}^2))_N(\frac{d-c}{2})((l_q, l_{q'}))_N$$

or on a

$((l_q, l_{q'}))_N = \delta_{qq'}\rho_q, ((\partial_\xi l_q, \partial_\xi l_{q'}))_N = \alpha_{qq'}, ((l_p^2, l_{p'}^2))_N = \delta_{pp'}\omega_p$ *et* $((\partial_\zeta l_p^2, \partial_\zeta l_{p'}^2))_N = \beta_{pp'}$

On déduit alors que

$$((\partial_{\zeta'}\tilde{l}_p^2\tilde{l}_q, \partial_{\zeta'}\tilde{l}_{p'}^2\tilde{l}_{q'}))_N = (\frac{d-c}{2})\delta_{qq'}\rho_q\beta_{pp'} \text{ et } ((\partial_{\xi'}\tilde{l}_p^2\tilde{l}_q, \partial_{\xi'}\tilde{l}_{p'}^2\tilde{l}_{q'}))_N = (\frac{b-a}{2})^2(\frac{2}{d-c})\delta_{pp'}\omega_p\alpha_{qq'}.$$

De même on a

$$((\frac{\tilde{l}_p^2\tilde{l}_q}{\zeta'-a}, \frac{\tilde{l}_{p'}^2\tilde{l}_{q'}}{\zeta'-a}))_N = (\frac{d-c}{2})\frac{\delta_{pp'}\delta_{qq'}}{(1+\zeta_p)^2}\omega_p\rho_q.$$

On peut écrire finalement dans le cas de l'équation de Laplace :

$$\begin{aligned} a_N^k(\tilde{l}_p^2(\zeta')\tilde{l}_q(\xi'), \tilde{l}_{p'}^2(\zeta')\tilde{l}_{q'}(\xi')) &= (\frac{d-c}{2})\delta_{qq'}\rho_q\beta_{pp'} + (\frac{b-a}{2})^2(\frac{2}{d-c})\delta_{pp'}\omega_p\alpha_{qq'} \\ &\quad + k^2(\frac{d-c}{2})\frac{\delta_{pp'}\delta_{qq'}}{(1+\zeta_p)^2}\omega_p\rho_q. \end{aligned}$$

et

$$a_N = a_N^0 \ .$$

4.6.3 Calcul de la marice B

4.6.3.1 La matrice B_{rk}

Lemme 4.6.4 *Pour tout $2 \le i, p \le N$ et $1 \le j,\ q \le N-1$, on a*

$$b_N(\ l_p^{(2)}l_q, 0; m_i^{(2)}m_j) = \frac{1}{4}\delta_{jq}\rho_q\omega_p\gamma_{ip},$$

où

$$\gamma_{ip} \begin{cases} 2\frac{\left(1-\zeta_i^2\right)}{\left(1-\zeta_p^2\right)}\frac{M_N\left(\zeta_p\right)}{M_N(\zeta_i)(\zeta_p-\zeta_i)} & i \neq p, \\ \frac{5\zeta_p-1}{\left(1-\zeta_p^2\right)} & i \neq p. \end{cases}.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} b_N(\ l_p^{(2)}l_q, 0; m_i^{(2)}m_j) &= -\left(\left(m_i^{(2)}m_j, \partial_r l_p^{(2)}l_q + \frac{l_p^{(2)}l_q}{r}\right)\right)_N \\ &= \frac{1}{4}\delta_{jq}\rho_q\omega_p\left(m_i^{(2)\prime}(r_p) + \frac{m_i^{(2)}(r_p)}{r_p}\right) + \frac{1}{4}\delta_{jq}\delta_{ip}\rho_q\omega_p. \end{aligned}$$

On utilise la proposition 4.5.5 pour conclure. ■

Lemme 4.6.5 *1) Si $q=0$, on a*

$$b_N(l_p^{(2)}l_0, 0; m_i^{(2)}m_j) = \begin{cases} \rho_0 m_j\,(-1)\,(\frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}\,(-1)\,\omega_1 + m_i^{(2)}\,(-1))\ \ si\ p=1. \\ \rho_0 m_j\,(-1)\,(\frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}\,(1)\,\omega_{N+1} - m_i^{(2)}\,(1))\ \ si\ p=N+1. \\ \frac{1}{2}\rho_0 m_j\,(-1)\,m_i^{(2)\prime}\left(\zeta_p\right)\omega_p\ \ si\ p\in[2,N]. \end{cases}$$

2) Si $q=N$, on a

$$b_N(l_p^{(2)}l_N, 0; m_i^{(2)}m_j) = \begin{cases} \rho_N m_j\,(1)\,(\frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}\,(-1)\,\omega_1 + m_i^{(2)}\,(-1))\ \ si\ p=1. \\ \rho_N m_j\,(1)\,(\frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}\,(1)\,\omega_{N+1} - m_i^{(2)}\,(1))\ \ si\ p=N+1. \\ \frac{1}{2}\rho_N m_j\,(1)\,m_i^{(2)\prime}\left(\zeta_p\right)\omega_p\ \ si\ p\in[2,N]. \end{cases}$$

3) Si $q\in[1,N-1]$, et $p\in[1,N+1]$ on a

$$b_N(l_p^{(2)}l_q, 0; m_i^{(2)}m_j) = \begin{cases} \rho_q\delta_{jq}(\frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}\,(-1)\,\omega_1 + m_i^{(2)}\,(-1))\ \ si\ p=1. \\ \rho_q\delta_{jq}(\frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}\,(1)\,\omega_{N+1} - m_i^{(2)}\,(1))\ \ si\ p=N+1. \end{cases}$$

Preuve On utilise la propriété d'exactitude.

$$\begin{aligned} b_N(l_p^{(2)}l_q, 0; m_i^{(2)}m_j) &= -((m_i^{(2)}m_j, \partial_r l_p^{(2)}l_q + \frac{l_p^{(2)}l_q}{r}))_N \\ &= \delta_{jq}\rho_q(\int m_i^{(2)\prime}(r)l_p^{(2)}(r)rdr - [m_i^{(2)}(r)l_p^{(2)}(r)]_0^1), \end{aligned}$$

ensuite on utilise le fait que $\tilde{m}_i^{(2)\prime}(r) = 2m_i^{(2)\prime}(\zeta)$ et $\int m_i^{(2)\prime}(r)l_p^{(2)}(r)rdr = \frac{1}{2}m_i^{(2)\prime}(\zeta_p)\omega_p$ et la proposition 4.5.5 pour conclure. ■

4.6.3.2 La matrice $B_{\theta k}$

Lemme 4.6.6 *Pour tout $2\le i,p\le N$ et $1\le j,\ q\le N-1$, on a*

$$((\ m_i^{(2)}m_j, \frac{l_p^{(2)}l_q}{r}))_N = \frac{1}{4}\frac{\delta_{ip}\delta_{jq}}{r_p}\omega_p\rho_q.$$

4.6.3.3 La matrice B_{zk}

Lemme 4.6.7 *1) Pour tout $2\le i,p\le N$ et $1\le j,\ q\le N-1$, on a*

$$b_N(0,\ l_p^N l_q, m_i^{(2)}m_j) = \frac{1}{4}\delta_{iq}\rho_q\omega_p\gamma_{jq}$$

où

$$\gamma_{jq}=\begin{cases}\frac{\left(1-\xi_j^2\right)}{\left(1-\xi_q^2\right)}\frac{L_N\left(\xi_q\right)}{L_N(\xi_j)(\xi_q-\xi_j)} & j\neq q,\\ \frac{2\xi_q}{\left(1-\xi_q^2\right)} & j=q.\end{cases}$$

2) Pour tout $2\leq i\leq N$ et $1\leq j,\ q\leq N-1$, on a

$$b_N(0,\ l_1^{(2)}l_q, m_i^{(2)}m_j)=\frac{1}{4}m_i^{(2)}\left(\zeta_1\right)\rho_q\omega_1\gamma_{jq},$$

où

$$\gamma_{jq}=\begin{cases}\frac{\left(1-\xi_j^2\right)}{\left(1-\xi_q^2\right)}\frac{L_N\left(\xi_q\right)}{L_N(\xi_j)(\xi_q-\xi_j)} & j\neq q,\\ \frac{2\xi_q}{\left(1-\xi_q^2\right)} & j=q,\end{cases}$$

Preuve Pour la preuve du lemme 4.6.7, on a la propriété d'exactitude

$$b_N(0,\ l_p^{(2)}l_q, m_i^{(2)}m_j)=\frac{1}{4}\delta_{ip}\rho_q\omega_p m_j'\left(\xi_q\right).$$

et

$$b_N(0,\ l_1^{(2)}l_q, m_i^{(2)}m_j)=\frac{1}{4}\rho_q\omega_1\gamma_{jq}m_i^{(2)}\left(\zeta_1\right)$$

où $\gamma_{jq}=m_j'\left(\xi_q\right)$. Enfin pour calculer $m_j'\left(\xi_q\right)$ et $m_i^{(2)}\left(\zeta_1\right)$ on utilise les propositions 4.5.4 et 4.5.5. ■

Lemme 4.6.8 *1) Si $q=0$, on a*

$$b_N(0,\ l_p^N l_0, m_i^{(2)}m_j)=\begin{cases}\frac{1}{4}m_i^{(2)}\left(\zeta_p\right)\omega_p\left(\rho_0\ m_j'\left(-1\right)+m_j\left(-1\right)\right) & si\ p=1\ \ ou\ p=N+1\\ \frac{1}{4}\delta_{ip}\omega_p\left(\rho_0\ m_j'\left(-1\right)+m_j\left(-1\right)\right) & si\ p\in[2,N].\end{cases}$$

1) Si $q=N$

$$b_N(0,\ l_p^N l_N, m_i^{(2)}m_j)=\begin{cases}\frac{1}{4}m_i^{(2)}\left(\zeta_p\right)\omega_p\left(\rho_N\ m_j'\left(1\right)-m_j\left(1\right)\right) & si\ p=1\ \ ou\ p=N+1.\\ \frac{1}{4}\delta_{ip}\omega_p\left(\rho_N\ m_j'\left(1\right)-m_j\left(1\right)\right) & si\ p\in[2,N].\end{cases}$$

1) Si $q\in[1,N-1]$

$$b_N(0,\ l_p^N l_q, m_i^{(2)}m_j)=\frac{1}{4}m_i^{(2)}\left(\zeta_p\right)\omega_p\rho_q\gamma_{jq}\ \ si\ p=1\ \ ou\ p=N+1.$$

Preuve On utilise la proprieté d'exactitude.

$$-((m_j, \partial_z l_q))_N = \int_{-1}^{1} m_j'(\xi) l_q(\xi) \partial\xi - [m_j(\xi) l_q(\xi)]_{-1}^{1}.$$

donc

$$-((m_j, \partial_z l_q))_N = \begin{cases} m_j'(\xi_q) \text{ si } q \in [1, N-1]. \\ m_j'(\xi_q) \pm m_j(\mp 1) \text{ si } q = 0 \text{ ou } N. \end{cases}$$

Enfin on utilise la propositon 4.5.4 pour conclure. ■

4.6.4 Calcul de p

On sait que $p_N(r,z) = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} m_i^{(2)}(r) m_j(z)$, on en déduit que

$$\int_\Omega p_N(r,z) r dr dz = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} pij (\int m_i^{(2)}(r) r dr)(\int m_j(z) dz).$$

On prend la solution $p_\delta = p_N - \frac{1}{mes\Omega} \int_\Omega p_N(r,z) r dr dz$ pour que

$$\frac{1}{mes\Omega} \int_\Omega p_\delta(r,z) r dr dz = 0.$$

Chapitre V

ANNEXE 2 : CALCUL DE LA MATRICE DES JOINTS

Pour traiter les trois domaines Ω_1, Ω_2 et Ω_3, on est contraint d'étudier quatres cas possibles de joints.

5.1 *Cas de la figure 1*

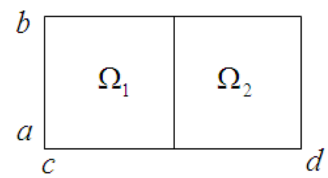

Fig. 5.1.1: 1^{er} cas du joint

On considère l'inconnue $\tilde{v}_1$ appartenant à $\mathbb{P}_{N_1}(\Omega_1)$, $\tilde{\Phi}$ la fonction joint appartenant à $\mathbb{P}_{N_2}(\Omega_2)$. et la fonction test $\tilde{\Psi}$ appartenant à $\mathbb{P}_{N_1-2}(\Gamma^{1,2})$.

La relation de joint s'écrit sur Γ.

$$\int_a^b \tilde{v}_1(\zeta', e)\tilde{\Psi}(\zeta')(\zeta' - a)\partial\zeta' = \int_a^b \tilde{\Phi}(\zeta', e)\tilde{\Psi}(\zeta')(\zeta' - a)\partial\zeta' \tag{5.1.1}$$

Ceci donne :

$$\frac{(b-a)^2}{4}\sum_{i=1}^{N_1+1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 = \frac{(b-a)^2}{4}\sum_{i=1}^{N_2+1} \tilde{\Phi}(\zeta_i^2, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^2)\omega_i^2, \tag{5.1.2}$$

où

ω_i^1 resp ω_i^2 sont les poids associés aux polynômes

de degré N_1 resp N_2 pour le segment de référence $[-1,1]$,

ζ_i^1 resp ζ_i^2 sont les nœuds associés à $(1-\zeta^2)M'_{N_1}$ resp

$(1-\zeta^2)M'_{N_2}$ pour le segment $[a,b]$.

Puisque $\tilde{v}_1(b,e) = \tilde{\Phi}(b,e)$ et $\tilde{v}_1(a,e) = \tilde{\Phi}(a,e)$, on a

$$\sum_{i=2}^{N_1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 = \sum_{i=1}^{N_2+1} \tilde{\Phi}(\zeta_i^2, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^2)\tilde{\omega}_i^2$$

où $\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2$ si $2 \leq i \leq N$, $\tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 - \omega_1^1$ et $\tilde{\omega}_{N_2+1}^2 = \omega_{N_2+1}^2 - \omega_{N_1+1}^1$.

On écrit (5.1.1) avec la fonction de base $\tilde{\Psi} = l_j^{2,N_1-2}$ définie par $l_j^{2,N_1-2}(\zeta_i^1) = \delta_{ij}$ $, i,\ j \in \{2, .., N_1\}$. On note $\tilde{v}_1(\zeta_i^1, e) = \tilde{v}_1^{iN_1}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{N_1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 &= \tilde{v}_1^{jN_1}\omega_j = \sum_{i=2}^{N_1} B_{ji}\tilde{v}_1^{jN_1}, \\
\text{avec } B_{ji} &= \delta_{ij}\omega_j \text{ et } j \in \{2, .., N_1\}.
\end{aligned}$$

De même, en notant $\tilde{\Phi}(\zeta_i^2, e) = \tilde{\Phi}^{1i}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{N_2} \tilde{\Phi}(\zeta_i^2, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^2)\omega_i^2 &= \sum_{i=1}^{N_2+1} \tilde{\Phi}^{1i} l_j^{2,N_1-2}(\zeta_i^2)\tilde{\omega}_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N_2+1} P_{ji}\tilde{\Phi}^{1i}.
\end{aligned}$$

avec

$$P_{ji} = l_j^{2,N_1-2}(\zeta_i^2)\tilde{\omega}_i^2.$$

On a ainsi $B\tilde{v} = P\tilde{\Phi}$ et puisque B est inversible, on peut écrire :

$$\tilde{v}_1 = B^{-1}P\tilde{\Phi}.$$

En posant $\tilde{Q} = B^{-1}P$ on a finalement :

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{ij} \text{ intérieurs} \\ \tilde{v}_1^{iN_1} \text{ extérieurs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{ij} \text{ intérieurs} \\ \tilde{\Phi}^{i0} \end{pmatrix}$$

La matrice du problème s'écrit :

$$Q^T A_1 Q = Q^T F_1.$$

5.2 Cas de la figure 2

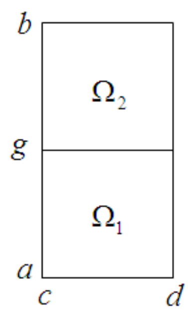

Fig. 5.2.1: $2^{ème}$ cas du joint

On considère l'inconnue $\tilde{v}_1$ appartenant à $\mathbb{P}_{N_1}(\Omega_1)$, $\tilde{\Phi}$ la fonction joint appartenant à $\mathbb{P}_{N_2}(\Omega_2)$ et fonction test $\tilde{\Psi}$ appartenant à $\mathbb{P}_{N_1-2}(\Gamma^{1,2})$.

La relation de joint s'écrit :

$$\int_c^d \tilde{v}_1(g,\xi)\tilde{\Psi}(\xi)\partial\xi = \int_c^d \tilde{\Phi}(g,\xi)\tilde{\Psi}(\xi)\partial\xi. \tag{5.2.1}$$

En simplifiant les constantes, on obtient :

$$\frac{(d-c)}{2}\sum_{i=0}^{N_1}\tilde{v}_1(g,\xi_i^1)\tilde{\Psi}(\xi_i^1)\rho_i^1 = \frac{(d-c)}{2}\sum_{i=0}^{N_2}\tilde{\Phi}(g,\xi_i^2)\tilde{\Psi}(\xi_i^2)\rho_i^2, \tag{5.2.2}$$

où

ρ_i^1 resp ρ_i^2 sont les poids associés aux polynômes

de degré N_1 resp N_2 pour le segment de référence $[-1,1]$.

ξ_i^1 resp ξ_i^2 sont les noeuds associés aux polynômes

de degré N_1 resp N_2 pour le segment de référence $[c,d]$.

On a alors
$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \tilde{v}_1(g,\xi_i^1)\tilde{\Psi}(\xi_i^1)\rho_i^1 = \sum_{i=0}^{N_2} \tilde{\Phi}(g,\xi_i^2)\tilde{\Psi}(\xi_i^2)\tilde{\rho}_i^2,$$
où
$$\tilde{\rho}_i^2 = \rho_i^1 \text{ si } i \in \{1,2,\ldots,N_2-1\}\,,\ \tilde{\rho}_{N_2}^2 = \rho_{N_2}^2 - \rho_{N_1}^1 \text{ et } \tilde{\rho}_0^2 = \rho_0^2 - \rho_0^1.$$

On écrit (5.2.1) avec les fonctions de base $l_j^{N_1-2}$ définies par $l_j^{N_1-2}(\xi_i^1) = \delta_{ij}$, $i,j \in \{1,..,N_1-1\}$. On a $\tilde{v}_1(g,\xi_i^1) = \tilde{v}_1^{N_1+1i}$, et
$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \tilde{v}_1(g,\xi_i^1)\tilde{\Psi}(\xi_i^1)\rho_i^1 = \tilde{v}_1^{N_1+1i}\rho_j^1 = \sum_{i=1}^{N_1-1} B_{ji}\tilde{v}_1(g,\xi_i^1)$$
avec
$$B_{ji} = \delta_{ij}\rho_j^1.$$

En notant $\tilde{\Phi}(g,\xi_i^2) = \tilde{\Phi}^{2i}$ on obtient
$$\sum_{i=1}^{N_2} \tilde{\Phi}(g,\xi_i^2)\tilde{\Psi}(\xi_i^2)\tilde{\rho}_i^2 = \sum_{i=1}^{N_2} \tilde{\Phi}^{2i} l_j^{N_1-2}(\xi_i^2)\tilde{\rho}_i^2$$
avec
$$P_{ji} = l_j^{N_1-2}(\xi_i^2)\tilde{\rho}_i^2.$$
On déduit que $B\tilde{v} = P\tilde{\Phi}$, et puisque B est diagonale non nulle, alors on a écrire :
$$\tilde{v} = B^{-1}P\tilde{\Phi}.$$
On pose $\tilde{Q} = B^{-1}P$ et on a finalement :
$$\begin{pmatrix} \tilde{v}^{ij} \text{ intérieurs} \\ \tilde{v}_1^{N_1+1i} \text{ extérieurs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}^{ij} \text{ intérieurs} \\ \tilde{\Phi}^{1i} \end{pmatrix}$$
La Matrice du problème s'écrit :
$$Q^T A_1 Q = Q^T F_1.$$

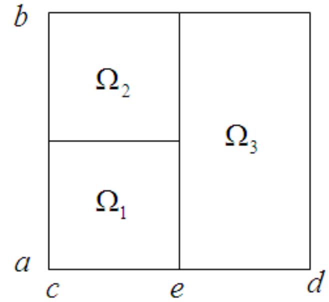

Fig. 5.3.1: $3^{ème}$ cas du joint

5.3 Cas de la figure 3

On considère l'inconnue $\tilde{v}_1$ appartenant à $\mathbb{P}_{N_1}(\Omega_1)$, deux fonctions joints $\tilde{\Phi}_2 \in \mathbb{P}_{N_2}(\Omega_2)$ et $\tilde{\Phi}_3 \in \mathbb{P}_{N_3}(\Omega_3)$, et la fonction test $\tilde{\Psi}$ appartenant à $\mathbb{P}_{N_1-2}(\Gamma)$. On suppose que $N_1 \leq \inf(N_2, N_3)$, on a

$$\int_a^b \tilde{v}_1(\zeta', e)\tilde{\Psi}(\zeta')(\zeta' - a)\partial\zeta' = \int_a^c \tilde{\Phi}_2(\zeta', e)\tilde{\Psi}(\zeta')(\zeta' - a)\partial\zeta' + \int_c^d \tilde{\Phi}_3(\zeta', e)\tilde{\Psi}(\zeta')(\zeta' - a)\partial\zeta'$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \frac{(b-a)^2}{4}\sum_{i=1}^{N_1+1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 &= \frac{(c-a)^2}{4}\sum_{i=1}^{N_2+1} \tilde{\Phi}_2(\zeta_i^2, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^2)\omega_i^2 \\ &+ \frac{(b-c)}{2}\sum_{i=1}^{N_3+1} \tilde{\Phi}_3(\xi_i^3, e)\tilde{\Psi}(\xi_i^3)(\xi_i^3 - a)\rho_i^3, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

ζ_i^1 resp ζ_i^2 sont les noeuds associés aux polynômes

de degré N_1 resp N_2 pour le segment $[a, b]$.

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{N_1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 &= \left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2 \sum_{i=1}^{N_2+1} \tilde{\Phi}_2(\zeta_i^2, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^2)\tilde{\omega}_i^2 \\ &+ \frac{2(b-c)}{(b-a)^2}\sum_{i=0}^{N_3} \tilde{\Phi}_3(\xi_i^3, e)\tilde{\Psi}(\xi_i^3)(\xi_i^3 - a)\tilde{\rho}_i^3, \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

où

$$\tilde{\omega}_i^2 = \omega_i^2 \text{ si } 2 \leq i \leq N_2+1 \quad \text{et } \tilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 - \left(\tfrac{b-a}{c-a}\right)^2 \omega_1^1$$
$$\tilde{\rho}_i^3 = \rho_i^3 \text{ si } 0 \leq i \leq N_3-1 \quad \text{et } \tilde{\rho}_{N_3}^3 = \rho_{N_3}^3 - \tfrac{(b-a)}{2(b-c)}\omega_{N_1+1}^1.$$

On écrit (5.3.2) avec la fonction de base l_j^{2,N_1-2}définie par $l_j^{2,N_1-2}(\zeta_i^1) = \delta_{ij}$,$i,\ j \in \{2,..,N_1\}$. On a $\tilde{v}_1(\zeta_i^1, e) = \tilde{v}_1^{iN_1}$, et on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{N_1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 &= \tilde{v}_1^{jN_1}\omega_j = \sum_{i=2}^{N_1} B_{ji}\tilde{v}_1(\zeta_i^1, e) \\ \text{avec } j &\in \{2,..,N_1\}.\end{aligned}$$

avec

$$B_{ji} = \delta_{ij}\omega_i.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{N_1} \tilde{v}_1(\zeta_i^1, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^1)\omega_i^1 &= \left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2 \sum_{i=1}^{N_2+1} \tilde{\Phi}_2(\zeta_i^2, e)\tilde{\Psi}(\zeta_i^2)\tilde{\omega}_i^2 \\ &+ \frac{2(b-c)}{(b-a)^2} \sum_{i=0}^{N_3} \tilde{\Phi}_3(\xi_i^3, e)\tilde{\Psi}(\xi_i^3)(\xi_i^3 - a)\tilde{\rho}_i^3, \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Ensuite, on note $\tilde{\Phi}_2(\zeta_i^2, e) = \tilde{\Phi}^{2i}$ et $\tilde{\Phi}_3(\xi_i^3, e) = \tilde{\Phi}^{3i}$. On conclut alors que $P_j = \begin{pmatrix} P_j^2 & P_j^3 \end{pmatrix}$, $2 \leq j \leq N_1$, avec

$$\begin{cases} P_{ji}^2 = \left(\tfrac{c-a}{b-a}\right)^2 l_j^{2,N_1-2}(\zeta_i^2)\tilde{\omega}_i^2 \\ P_{ji}^3 = \tfrac{2(b-c)}{(b-a)^2} l_j^{2,N_1-2}(\xi_i^3)(\xi_i^3 - a)\tilde{\rho}_i^3. \end{cases}$$

On peut déduire alors que $B\tilde{v} = P\tilde{\Phi}$ où $\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}^2 \\ \tilde{\Phi}^3 \end{pmatrix}$, et puisque B est diagonale non nulle, alors on peut écrire $\tilde{v}_1 = B^{-1}P\tilde{\Phi}$. En posant $\tilde{Q} = B^{-1}P$ on a finalement :

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{ij} \text{ interieurs} \\ \tilde{v}_1 \text{ exterieurs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{ij} \text{ interieurs} \\ \tilde{\Phi} \end{pmatrix}$$

La Matrice du problème s'écrit alors

$$Q^T A_1 Q = Q^T F_1.$$

5.4 Polynômes associés à la matrice de raccord

5.4.1 Polynôme $l_j^{2,N-2}$

Soit $l_j^{2,N-2} \in \mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$ le polynômes de Lagrange associés aux zéros de M_N'. Dans la proposition suivante on va écrire $l_j^{2,N-2}$explicitement :

Proposition 5.4.1 *Soit $l_j^{2,N-2}$ les polynômes de Lagrange associés aux zéros de M_N'. On a*

$$l_j^{2,N-2}(\zeta) = -\frac{(1-\zeta_j^2)M_N'(\zeta)}{N(N+2)M_N(\zeta_j)(\zeta-\zeta_j)} \text{ si } \zeta \neq \zeta_j \text{ et } 1 \text{ sinon.}$$

Preuve Si $2 \leq j \leq N$, on écrit $l_j^{2,N-2}$ de la forme suivante :

$$l_j^{2,N-2}(\zeta) = \alpha \frac{M_N'(\zeta)}{(\zeta-\zeta_j)} \ .$$

Si $\zeta \longrightarrow \zeta_j$, on a

$$l_j^{2,N-2}(\zeta_j) = 1 = \alpha \lim_{\zeta \longrightarrow \zeta_j} \frac{M_N'(\zeta)}{(\zeta-\zeta_j)}$$

Comme on a

$$\lim_{\zeta \longrightarrow \zeta_j} \frac{M_N'(\zeta)}{(\zeta-\zeta_j)} = M_N''(\zeta_j)$$

et

$$M_N''(\zeta_j) = -\frac{N(N+2)M_N(\zeta_j)}{(1-\zeta_j^2)}, \ 2 \leq j \leq N$$

on déduit que

$$\alpha = -\frac{(1-\zeta_j^2)}{N(N+2)M_N(\zeta_j)}$$

■

5.4.2 Polynôme l_j^{N-2}

Soit l_j^{N-2} les polynômes de Lagrange associés aux zéros de L_N'. Pour expliciter ce polynôme, on utilise la proposition suivante :

Proposition 5.4.2 *Soit l_j^{N-2} le polynômes de Lagrange associés aux zéros de L_N'. Alors on a :*

$$l_j^{N-2}(\xi) = -\frac{(1-\xi_j^2)L_N'(\xi)}{N(N+1)L_N(\xi_j)(\xi-\xi_j)} \text{ si } \xi \neq \xi_j \text{ et } 1 \text{ sinon.} \qquad (5.4.1)$$

Preuve Pour $2 \leq j \leq N$, on écrit l_j^{N-2} de la forme suivante :

$$l_j^{N-2}(\xi) = \alpha \frac{L_N^{'}(\xi)}{(\xi - \xi_j)}$$

Si $\xi \longrightarrow \xi_j$

$$l_j^{N-2}(\xi_j) = 1 = \alpha \lim_{\zeta \longrightarrow \zeta_j} \frac{L_N^{'}(\zeta)}{(\xi - \xi_j)}$$

or

$$\lim_{\zeta \longrightarrow \zeta_j} \frac{L_N^{'}(\zeta)}{(\zeta - \zeta_j)} = L_N^{''}(\zeta_j)$$

et

$$L_N^{''}(\zeta_j) = -\frac{N(N+1)L_N(\zeta_j)}{(1-\xi_j^2)} \qquad 2 \leq j \leq N$$

d'où

$$\alpha = -\frac{(1-\xi_j^2)}{N(N+1)L_N(\xi_j)}.$$

On en déduit (5.4.1). ■

RÉFÉRENCES

[1] **N. Abdellatif** — Méthodes spectrales et d'éléments spectraux pour les équations de Navier-Stokes axisymétriques, Thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1997).

[2] **M. Abramowitz, I.A. Stegun** — Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications (1965).

[3] **Y. Achdou, Yu.A. Kuznetsov** — Algorithms for a non conforming domain decomposition method, Rapport de l'école polythechnique, 1994.

[4] **Y. Achdou**, **O. Pironneau**, A fast solver for Navier-Stokes equations in the laminar regime using mortar element method and boundary element method, Rapport de l'école polythechnique, 1993.

[5] **S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg** — Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Com. Pure Appl. Math. 17 (1964), 35-92.

[6] **M. Amara, M.A Moussaoui** — Approximation de cœfficients de singularité, C.R. Acad. Sciences Paris, 313, série 1, 335–338, 1991.

[7] **O. Axelsson** — Iterative Solution Methods, Cambridge University Press (1994).

[8] **M.Azaïez, C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday**— Spectral Methods for Axisymetric Domains, "Series in Applied Matimatics". 3, GauthierVillars et North-Holland (1999).

[9] **I. Babuška** — The finite element method with Lagrangian multipliers, Numer. Math. 20 (1973), 179–192.

[10] **K. Bellalouna** — Résolution d'E.D.P par la méthode spectrale sur un réseau de cylindres. Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI (2007).

[11] **Z. Belhachmi** — Méthodes d'éléments spectraux avec joints pour la résolution de problèmes d'ordre quatre. Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1994).

[12] **F. Ben Belgacem** —The Mortar finite element method with lagrangian multiplier, Numer. Math. **84** (1999), 173–197.

[13] **F. Ben Belgacem** — Discrét :satson 3D non conformes par méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints : analyse mathématique et mise en oeuvre pour le problème de Poisson, Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1993.

[14] **Z. Belhachmi, C. Bernardi, S. Deparis** — Weighted element operator and application to the finite element discretization of the axisymmetric Stokes problem, Numer.Math. 105 (2006), 217–247.

[15] **Z. Belhachmi, C. Bernardi, S. Deparis, F. Hecht** — A truncated Fourier/finite element discretization of the Stokes equations in an axisymmetric domain, Math. Models and Methods in Applied Sciences 16 (2006), 233–263.

[16] **C. Bernardi, M. Dauge, M. Azaïez** — Numerical Analysis and Spectral Methods in Axisymetric Problems. Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie.

[17] **C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday** — Polynomials in Sobolev Spaces and Application to the Mortar Spectral Element Method, in preparation.

[18] **C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday** — Polynomials in weighted Sobolev spaces : basics and trace liftings, Internai Report 92039, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992).

[19] **C. Bernardi, N Debit, Y. Maday** — Couplage de méthodes spectrales et d'éléments finis : premiers résultats, C.R. Acad. Sc. Paris 305 série 1, 353–356, 1987.

[20] **C. Bernardi, Y. Maday**, **A.T. Patera** — A new non conforming approch to domain de- composition : the mortar element method Non lienar Partial Differential Equations and their Aplications, Collège de France Seminar XI, H. Brézis & J-L. Lions eds (1992), 1992.

[21] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti** — Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques. Collection " Mathématiques et Applications 45, Springer-Verlag (2004)

[22] **C. Bernardi, Y. Maday**— Spectral Methods, Handbook of Numerical Analysis, Vol. **V,** P.G Ciarlet and J.-L. Lions eds., Pitman (1994), 13–51.

[23] **C. Bernardi, Y. Maday** — Spectral Methods, Handbook of Numerical Analysis, Vol. V, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds., North-Holland (1996), 209–485.

[24] **C. Bernardi, Y. Maday** — Polynomial approximation of some singular functions, Applicable Analysis : an International Journal **42** (1991),769–829.

[25] **C. Bernardi, Y. Maday** — Properties of some weighted Sobolev spaces, and application to spectral approximations, SIAM J. Numer. Anal. 26 (1989), 769–829.

[26] **S. Bertoluzza, S. Falletta, V. Perrier** —The Mortar method in the wavelet context, Model. Math. et Anal. Numer. **35** (2001),647–673.

[27] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti** — Basics and some applications of the mortar element method, GAMM – Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik 28 (2005), 97–123.

[28] **J. Boland, R. Nicolaides** — Stability of finite elements under divergence constraints, {\sl SIAM J. Numer. Anal.} {\bf 20} (1983),722–731.

[29] **H. Brezis** — Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[30] **F. Brezzi** — On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multîpliers, R.A.I.R.O. Anal. Numer. 8 R2 (1974), 129–151.

[31] **N. Chorfi** — Traitement de singularités géométriques par méthode d'éléments spectraux avec joints. Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1998).

[32] **P. Ciarlet** — The finite element method for elliptic problems, North Holland, 1978.

[33] **M. Costabel, M. Dauge** — Construction of corner singularities for Agmon-Douglis-Nirenberg elliptic Systems, Math. Nachr. 162 (1993), 209–237.

[34] **N. Debit**, La méthode des éléments à joints dans le cas du couplage des méthodes spectrales et méthodes déléments finis : Résolution des équations de Navier-Stokes, Thèse de l'université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1992.

[35] **V. Girault, P.-A. Raviart** — Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag (1986).

[36] **P. Grisvard** — Elliptic Problems in Nonsmooth Domains (1985).

[37] **V. A. Kozlov, V.G. Maz'ya, C. Schwab** — On singularities of solutions of the Dirichlet problem of hydrodynamics near the vertex of a cône, J. Reine Angew. Math. 456 (1994), 65–97.

[38] **J.-L. Lions, E. Magenes** — Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod (1968).

[39] **C.A. Mavriplis, Y. Maday, A.T. Patera** — Non conforming mortar element method : Application to spectral discretisations, Proceedings of the second international symposium on domain de composition methods for P.D.E, SIAM, Philadelphia., 1988.

[40] **G.J Fix, G. Strang,** — An analysis of the finite element, Prentice-Hall Engelwood, New Jersey, 1973.

[41] **R. Temam** — Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations, North-Holland (1977).